UN ENSEIGNEMENT DE L'ALGÈBRE STRUCTURÉ PAR LA MODÉLISATION, DU SECONDAIRE AU SUPÉRIEUR

Pierre JOB
Laboratoire de didactique de l'Université de Liège (Ladimath)
ICHEC Brussels Management School
Mariza KRYSINSKA
Laboratoire de didactique de l'Université de Liège (Ladimath)
Maggy SCHNEIDER
Laboratoire de didactique de l'Université de Liège (Ladimath)

1. — Introduction

L'enseignement de l'algèbre est une question vive depuis plusieurs décennies déjà, si l'on s'en tient à la seule naissance de la didactique moderne à la française, initiée par Brousseau dans les années septante. En témoigne la multitude de publications, d'écoles d'été et conférences en tous genres, consacrées à cette thématique, dont le numéro spécial qui contient cet article. Il est vrai que le terme « algèbre » est foncièrement polysémique si on considère simplement ce qu'on entend généralement par algèbre lorsqu'on s'intéresse à l'enseignement de la discipline au niveau du collège et quelle en est la substance pour un chercheur traitant de questions d'algèbre. Dans ce premier cas, on a volontiers en tête des lettres , qui dénotent des nombres avec à la clef des résolutions d'équations, des pratiques de « mise en évidence » et de « distributivité », quelques produits remarquables. L'empan algébrique est, à ce niveau, pour ainsi dire saisissable d'une main. L'horizon algébrique s'étend à mesure de l'avancée dans le système éducatif avec notamment l'irruption des fonctions puis des structures. Se pose alors la question du point de vue à adopter, du modèle épistémologique de référence à concevoir, permettant de traiter, si pas l'ensemble de cette diversité, du moins une portion suffisamment significative pour qu'elle n'engendre pas, par effet de bord, des problématiques de transitions entre collège, lycée, supérieur dont une partie serait en définitive imputable au cadre théorique retenu pour aborder l'enseignement de l'algèbre, plus qu'à des difficultés plus « intrinsèques », indépendante du choix des cadres de référence adoptés par les chercheurs.

C'est à cette difficulté que nous avons été confrontés dans l'élaboration de ce texte, car notre perspective est de couvrir l'enseignement de l'algèbre du collège à la première année du supérieur. Il nous a donc fallu développer un modèle épistémologique de référence, à la fois suffisamment souple pour englober la diversité algébrique rencontrée, mais également instrumental dans le traitement des questions d'enseignement. C'est ainsi que nous avons été conduits à considérer l'algèbre en un sens étendu, comme émergeant de pratiques de modélisation entendues au sens d'élaboration de systèmes de signes permettant de représenter des concepts, des idées… issus de problèmes mathématiques ou d'autres disciplines, autorisant un traitement dont l'instrumentalité est suffisante pour justifier sa constitution et son adoption. Dans ce cadre de pensée élargi figure bien entendu les et les du collège (pour le dire rapidement) mais tout autant le système de signes employés en calcul des propositions tel l'emblématique . C'est ainsi que nous ferons une incursion furtive dans la problématique de l'enseignement de la logique des propositions, non pour traiter cette question, mais pour illustrer le type de questionnement et de réponse que notre modèle épistémologique de référence nous permet d'aborder et la possibilité qu'il offre de rapprocher des parties des mathématiques qui ne seraient pas spontanément reliées sous la bannière de l'algèbre, du moins lorsqu'on s'intéresse aux questions d'enseignement de l'algèbre, au niveau de la scolarité obligatoire. Ce type d'« écart » nous permettra également de témoigner du type de regard qui nous semble opportun d'adopter pour traiter les questions d'enseignement de l'algèbre où la prise en compte du rapport des institutions à l'algèbre et aux savoirs en général peut conditionner de manière décisive le champ des possibles en matière d'enseignement (de l'algèbre).

La manière étendue dont nous concevons l'algèbre résulte de la prise en charge de l'enseignement de cette discipline du secondaire au supérieur et nos outils d'analyse s'intègrent dans la Théorie Anthropologique de Chevallard à travers principalement des concepts d'*ostensif*, *non-ostensif* ainsi que les notions associées d'*instrumentalité* et de *sémioticité* (Bosch et Chevallard, 1999).Ces concepts seront présentés au fur et à mesure des besoins.

2. — Les écueils propres à l'enseignement de l'algèbre

La plupart de ces écueils ont été identifiés dans les travaux pionniers de Chevallard (1989) et ceux de Gascon (1993) et demeurent toujours d'actualité, malgré plusieurs progrès des pratiques enseignantes. Nous complétons ici leur liste par ce que nous avons pu observer sur le terrain. Parmi ces écueils figure en bonne place une absence de finalité et donc de fonctionnalité de l'algèbre enseignée en dehors d'elle-même, du moins dans le cadre du cycle inférieur (CI) du secondaire (ou niveau collège en France) :

> *« [À l'issue du collège], la manipulation des expressions algébriques n'est tendue vers aucun but (mathématique) extérieur au calcul algébrique, lequel doit trouver en lui-même la source de ses propres exigences. Aussi, les « règles » de cette manipulation sont-elles immotivées, purement formelles, s'exprimant par des consignes elles-mêmes standardisées (développer, factoriser) ».* (Chevallard, 1989, p. 47).

Au cycle supérieur (CS), au contraire, il ne s'agit plus de respecter une règle ou une consigne imposée mais d'assumer un certain degré d'incertitude sur ce qu'il convient de faire d'une expression algébrique et donc prendre des décisions. Ainsi, suivant les circonstances, il faudra choisir parmi ces expressions équivalentes ou décider de transformer l'une en l'autre :

- $2x^2 - 3x + 1$,
- $2(x - 1)(x - 1/2)$,
- $x^2 (2 - 3/x + 1/x^2)$.

En effet, en les regardant comme des fonctions qui donnent une variable y dépendant de x, on dérive très facilement la première, on lit tout de suite les racines sur la deuxième et les limites aux infinis sur la troisième. Nous voyons ici un certain bénéfice d'inscrire ces expressions dans un cadre fonctionnel et nous y reviendrons plus loin.

Ce changement de point de vue entre CI et CS est un changement du contrat didactique vis-à-vis de l'élève qui est une cause majeure d'échec, car l'absence de fonctionnalité l'enferme dans ce que Chevallard (1988) appelle une pseudo-algorithmicité (p. 6) :

> *« D'une manière générale, l'enseignement usuel tend à diminuer l'incertitude inhérente à l'activité mathématique en fournissant à l'élève un code de conduite, nulle part explicité comme tel, mais extrêmement prégnant, qui engendre un quasi déterminisme des pratiques mathématiques scolaires, ce que nous nommerons la pseudo-algorithmicité. On a un carré* $(1 + \cos 2x)^2$*, DONC on le développe. On a* 2 *en facteur commun dans* $2 + 2 \cos 2x$*, DONC on factorise :*
> $2 + 2 \cos 2x = 2(1 + \cos 2x)$ *».*

Un autre écueil majeur réside dans la méconnaissance, chez les élèves, du phénomène de dénotation que décrivent (Sackur & al., p.47) en ces termes : « Une expression comme $y(2x + y)$ a une valeur numérique qui dépend des valeurs de x et de y et qui n'est pas modifiée par les transformations conformes aux règles algébriques. ». En somme, certains élèves n'attribuent tout simplement pas aux lettres contenues dans une expression algébrique le rôle de représentation (ou de dénotation) de valeurs numériques.

Cette absence de conscience du phénomène de dénotation se manifeste également dans une constatation faite par Vlassis et Demonty (2002) lors d'évaluations externes fin de 2e année : les élèves (belges) ne savent pas ce que signifie vérifier que 2 est solution de l'équation $3x - 6 = 0$.

Et pourtant, c'est ce pouvoir de dénotation qui fait des expressions algébriques des outils typiques de l'économie de pensée que Polya (1967) illustre à partir d'un exemple ludique relevant des systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues (connaître le nombre de poules et de lapins d'un fermier connaissant le nombre total de têtes et celui des pattes). Il montre d'abord qu'un tel système peut être résolu par tâtonnement mais explique que cette méthode devient pénible dès que les solutions ne sont plus entières. Il poursuit par une idée « lumineuse » (consistant ici à imaginer des poules se tenant sur une seule patte et des lapins sur leurs pattes de derrière) mais poursuit en disant qu'on n'a pas toujours beaucoup d'ingéniosité. Il développe ensuite comment on peut déterminer les inconnues par une simple manipulation algébrique des expressions en jeu. Beaucoup d'élèves ne semblent pas conscients de cette économie de pensée des mathématiques.

Encore faut-il qu'ils manipulent les expressions algébriques par des règles conformes et que ces règles soient correctement motivées pour faire sens à leurs yeux.

On observe cependant un certain malaise à propos des justifications des règles algébriques. À l'époque des mathématiques modernes, on justifiait, par exemple, la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans l'ensemble des réels en invoquant une structure de corps. Mais nous cherchons ici à inverser le processus : c'est grâce à des règles algébriques dont celle de distributivité qu'on a le droit de conférer à l'ensemble **R** une structure de corps et non le contraire.

Dans plusieurs recherches anglo-saxonnes, on s'ingénie à trouver une cohérence derrière les erreurs algébriques habituelles comme si elles étaient inhérentes à l'apprentissage, par exemple écrire $2a + 5a + 3b = 10ab$ en pensant que la réponse doit comporter un seul terme qui garde mémoire des lettres et des valeurs numériques présentes dans le premier membre de l'égalité ou encore qu'il faut conserver un signe « – » dans la réponse quand il y en a plusieurs dans une multiplication même lorsqu'il y a un nombre pair de facteurs. Mais la plupart de ces erreurs peuvent s'interpréter en termes d'effets du contrat didactique : faute d'un enseignement qui justifie ces règles (autrement qu'à l'époque des maths modernes), les élèves s'inventent des obligations qu'ils pensent conformes aux attentes du professeur. Ces fausses obligations sont alors cataloguées de théorèmes « élèves » (suite aux travaux de Mercier, 1996) et donc, loin de constituer des obstacles d'apprentissage inéluctables, elles relèveraient plus d'un problème d'enseignement. Ce qui nous renvoie à la section suivante.

Un dernier exemple illustre que le phénomène de dénotation concerne également le travail sur les fonctions et nous donnera l'opportunité d'introduire un élément important de notre analyse, à savoir le concept d'étiquetage.

En effet, la compréhension des fonctions de **R** dans **R** souffre également, chez plusieurs élèves, d'une absence de prise de conscience du pouvoir de dénotation des expressions symboliques. Parmi de nombreux exemples, prenons-en un décrit par Schneider (1988) dans le contexte du calcul intégral. Schneider (1988) identifie des élèves qui, en cherchant à estimer une aire sous la courbe représentative de la fonction $y = x^3$ au moyen d'une somme d'aires de rectangles, ne savent pas calculer la hauteur d'un de ces rectangles alors que c'est tout simplement l'image d'une abscisse particulière par cette fonction. Pour eux, cette formule est tout simplement le nom associé à cette courbe, son « étiquette » en quelque sorte, et non pas un lieu de points (au sens géométrique), soit une contrainte vérifiée par les coordonnées (x, y) des points de la courbe et rien que ceux-là.

Parmi bien d'autres, ce phénomène peut être analysé au moyen des concepts d'*ostensif* et de *non ostensif*, ainsi que les notions associées d'*instrumentalité* et de *sémioticité*. Nous nous limiterons ici à une évocation synthétique de ceux-ci et renvoyons le lecteur à Bosch et Chevallard (1999) pour plus de détails. Un non-ostensif est un objet immatériel tel une idée, une notion, un concept, … Un ostensif est un objet matériel permettant d' « accéder » à un ou plusieurs non-ostensifs. On y trouve notamment les symboles algébriques mais plus généralement les paroles et les gestes et tout ce qui en définitive relève d'une matérialité permettant l'usage de non-ostensifs. Ces deux concepts permettent de prendre en charge la complexité des éléments matériels mis à contribution dans l'activité mathématique. Ainsi $2x + 6 = 9$ est un ostensif qui peut désigner, selon le contexte, les non-ostensifs « équation », « contrainte », « droite ». La question de la dénotation s'envisage alors, dans cette théorisation, à l'aune de deux notions, celles d'instrumentalité et de sémioticité d'un ostensif. L'instrumentalité d'un ostensif renvoie à sa capacité à accomplir un certain travail (mathématique), à résoudre de manière plus ou moins efficace une série de tâches. La sémioticité d'un ostensif renvoie, quant à elle, aux non-ostensifs que cet ostensif dénote et les raisons de ces associations.

L'étude croisée de l'instrumentalité et de la sémioticité des ostensifs et non-ostensifs associés offre une grille de lecture puissante des phénomènes didactiques, l'instrumentalité, pour le formuler brièvement, d'un ostensif étant conditionnée par sa sémioticité et réciproquement. Comme illustré par l'observation de

Schneider ci-dessus, avec la notion d'*étiquetage algébrique*, dans le cadre des fonctions, un ostensif tel que $y = x^3$ peut avoir une instrumentalité proche du néant, il ne permet d'accomplir aucun travail significatif, parce que sa sémioticité est réduite à celle d'une étiquette, dont la finalité n'est pas de rendre compte et de quantifier un lien entre grandeurs ou variables mais simplement de permettre de faire référence de façon compacte à un graphique de fonction.

De manière générale, nous nommerons *étiquetage algébrique* la pratique consistant à désigner à l'aide d'un ostensif algébrique, un objet, quelle que soit sa nature, sans que cette désignation soit choisie de manière consciente et intentionnelle pour permettre le traitement de l'objet et des problématiques associées par l'algèbre. Autrement formulé, la pratique de l'étiquetage est effectuée à l'aide d'ostensifs algébriques pour se conformer au contexte culturel au sein duquel ils interviennent selon une logique institutionnelle qu'on pourrait résumer par le propos : « Les ostensifs sont algébriques parce que l'algèbre fait partie des mathématiques ». Le contexte eut été celui de la chimie, l'étiquetage aurait été réalisé à l'aide de symboles chimiques, quand bien même aucune chimie n'aurait été pratiquée par les apprenants avec ces ostensifs. Cette notion d'étiquetage algébrique ainsi étendue sera mise à contribution dans la suite de cet article pour assurer la transition entre l'algèbre du secondaire et du supérieur, algèbre considérée comme résultante de pratiques de modélisation et ainsi renforcer la mise en évidence de la cohérence épistémologique du modèle de référence adopté.

3. — Quelles portes d'entrée pour l'algèbre ? Le choix d'un modèle épistémologique de référence

Cette question en appelle une autre : qu'est-ce que l'algèbre ? À cette dernière, Artigue (2015) répond que ce peut être la science des équations (inéquations, systèmes d'équations, …) ou encore la science des structures (groupes, espaces vectoriels, …). Tout dépend évidemment du niveau de scolarité envisagé mais on ne peut nier l'influence des maths « supérieures » sur les mathématiques « élémentaires » au niveau du secondaire, par exemple dans la manière de justifier des règles de distributivité en algèbre comme dit supra. À partir de là, on observe, trois entrées principales pour l'algèbre élémentaire que Artigue (Ib.) décrit en ces termes :

- L'entrée par les équations (inéquations, systèmes) qui sont les objets traités en priorité dans laquelle la lettre a surtout le statut d'inconnue.
- L'entrée par les « patterns » : recherche de régularités, de modèles. La lettre est alors un « nombre généralisé » et les objets d'étude privilégiés sont des formules auxquelles conduisent, par exemple, les suites de nombres figurés dans des problèmes de dénombrement.
- L'entrée par la modélisation où l'on exprime des covariations entre grandeurs. Les lettres x et y ont le statut de variables et l'objet prioritaire est la fonction.

L'entrée par les équations est une tradition de France et des pays latins. Elle n'exclut pas des exercices de modélisation sous la forme de mises en équation de problèmes divers mais, en raison de la priorité choisie, cette entrée a conduit à un modèle épistémologique implicite fort critiqué par Chevallard (1984) et Gascon (1993). En effet ce modèle implicite met excessivement « l'accent sur le 'symbolisme algébrique' en l'opposant au supposé 'langage arithmétique' que le premier est censé élargir et généraliser » et, ce faisant, il conduit entre autres à :

- la « désarticulation » du corpus de problèmes en résolutions d'équations ou d'inéquations, de manipulation d'identités et de fonctions élémentaires, d'application de formules et de résolution de problèmes 'concrets';

- l'interprétation des difficultés d'acquisition du langage algébrique trop exclusivement référée au cadre arithmétique, comme la modification du sens des signes +, =, –, x, … d'un langage à l'autre.

Quant aux deux autres entrées, par les « patterns » et par la modélisation, elles peuvent être combinées. Selon Artigue, elles progressent en France, en particulier grâce aux recherches et aux influences internationales, mais la ligne directrice des programmes reste imprégnée de la tradition culturelle tant le modèle épistémologique qui vient d'être décrit est dominant dans les pratiques enseignantes, voire les pratiques curriculaires.

Nous pensons qu'il en va de même en Belgique francophone où l'enseignement compartimente trop, d'entrée de jeu, les apprentissages algébriques visés pour eux-mêmes. En disant cela, nous devons préciser que la catégorisation des objets algébriques en classes : équations ou inéquations d'un type donné est ce qui fait la force de l'algèbre puisqu'on dispose alors de procédures efficaces pour des classes entières de problèmes. Mais, il nous paraît important que l'élève participe à cette catégorisation des procédures algébriques construites au fur et à mesure des besoins rencontrés, dans la perspective d'un modèle épistémologique de référence formulé par Bosch et Gascon (2002) comme alternative au modèle implicite décrit plus haut. Ce nouveau modèle fait la part belle à la modélisation, en valorisant l'algèbre comme domaine mathématique au service de l'étude d'autres domaines mathématiques qui procurent ainsi à l'algèbre une fonctionnalité autre qu'elle-même. Ce qui n'empêche, à un niveau plus élevé de scolarité, une étude ultérieure de purs objets algébriques.

Mais revenons à notre question première des portes d'entrée de l'algèbre. Elles sont multiples comme en témoigne cette liste : la géométrie analytique, le calcul de grandeurs, l'analyse et l'étude des fonctions en particulier, la programmation numérique, l'algèbre financière … ou plusieurs de ces domaines. Sans exclure aucune de ces approches pourvu qu'elle soit adaptée au niveau de scolarité, c'est la piste de la modélisation fonctionnelle que nous développons ici, modélisation à laquelle on peut greffer de nombreux apprentissages algébriques. Nous le justifions en nous référant à la pensée algébrique telle que Radford (2015) la caractérise en trois éléments : les indéterminés, la dénotation et l'analyticité :

- *« indéterminés : la situation mathématique considérée contient des nombres non-connus (inconnues, variables, paramètres, etc.) ; c'est-à-dire, elle contient des indéterminés.*
- *dénotation : les nombres indéterminés impliqués dans la situation doivent être nommés ou signifiés d'une certaine manière. La signification peut être accomplie de diverses manières. On peut utiliser des signes alphanumériques, mais pas nécessairement. La dénotation de nombres indéterminés peut également être signifiée par le langage naturel, les gestes, les signes non conventionnels (diagrammes, par exemple), ou même une combinaison de ceux-ci.*
- *analyticité : les nombres indéterminés sont traités comme s'ils étaient des nombres connus. C'est-à-dire, bien qu'ils ne soient pas connus, les nombres indéterminés sont traités de la même manière que les nombres connus : on les additionne, les soustrait, les multiplie, les divise, etc. »* (p. 341).

Cette caractérisation est présentée par son auteur comme étant de nature épistémologique et, de ce point de vue, nous y retrouvons effectivement les propriétés du langage algébrique décrites plus haut. À commencer par le pouvoir de dénotation des expressions algébriques et, ensuite, l'économie de pensée que procure « l'analycité » de ces expressions puisque leur manipulation régulée, comme si on avait affaire à des nombres, permet de compenser l'absence d'idée ingénieuse pour résoudre un problème.

Mais c'est surtout dans les non-dits de ce modèle que nous trouvons des arguments en faveur d'une subordination de la pensée algébrique à la pensée fonctionnelle conçue comme production de modèles fonctionnels dans le cadre de la résolution de problèmes issus ou non de domaines mathématiques.

Tout d'abord, les caractéristiques retenues par Radford peuvent convenir aussi bien dans le cadre d'une pensée fonctionnelle conçue comme production que dans celui d'une pensée algébrique, tant pour la présence d'indéterminés que pour la dénotation et l'analycité.

Ensuite, Radford y différencie peu le rôle des différents nombres indéterminés, à commencer par celui des paramètres. Alors que ceux-ci autorisent une démultiplication de l'économie de pensée. Pensons aux équations du second degré représentées par l'expression paramétrée $ax^2 + bx + c = 0$ qui se prête à un traitement général lequel rend automatique la résolution de n'importe laquelle de ces équations. Il en va de même des modèles fonctionnels paramétrés qui permettent le traitement globalisé d'une multitude de fonctions : ainsi le modèle fonctionnel paramétré $y = ax^2$ qui prend en compte autant la formule $A = \pi r^2$ donnant l'aire d'un disque en fonction de son rayon que celle qui exprime la distance de freinage d'un véhicule en fonction de la vitesse : $d = 0{,}005\ v^2$.

Enfin, le modèle de Radford se situe surtout au niveau des propriétés propres au langage algébrique et peu à celui des objectifs que l'on peut attendre des élèves. Alors que la pensée algébrique devrait prendre en compte une certaine perspicacité des élèves dans le choix des procédures algébriques propres à résoudre des problèmes : tantôt celui d'une équation, tantôt celui du calcul d'une image par une fonction, etc. Cette plasticité va de pair évidemment avec un changement de statut d'une lettre et cela peut être travaillé très tôt dans le cursus scolaire par la manipulation de formules faites à partir de lettres-objets qui désignent des grandeurs dont elles rappellent le nom, comme V pour Volume. Dans cette perspective, nous optons pour un travail précoce des paramètres et des formules, semblable à celui que décrit Chevallard (1989, pp. 65-66) :

> *« L'emploi de paramètres remet à une place centrale, dès le niveau le plus élémentaire* […], *la notion de formule. Cette notion est immédiatement liée à celle de fonction : la mesure "b" du côté d'un rectangle d'aire "S", dont l'autre côté a pour mesure "a", est donnée par la formule b = S / a ; supposons S fixé et faisons varier x = a ; la mesure de l'autre côté, soit y = b, est une fonction (homographique) de x, donnée par y = S / x. La fonctionnalité du calcul algébrique qu'une perspective de renouvellement curriculaire doit viser suppose ainsi, précocement, l'emploi de paramètres ; suscite la réappropriation de la notion de formule (en mettant en avant leur production autant que leur mise en œuvre) ; et conduit à envisager la familiarisation, précoce tout autant, avec la notion de fonction. »*

Pour toutes ces raisons, nous plaidons en faveur d'une subordination de la pensée algébrique à la pensée fonctionnelle à travers un parcours pour l'enseignement secondaire développé dans les grandes lignes aux sections 5 à 7. A la section 8, nous poursuivrons par un dispositif ciblé sur l'enseignement supérieur et développant des acquisitions algébriques ancrées dans un terreau économique, susceptibles de servir de marchepied à l'analyse (des fonctions) et à la programmation linéaire.

4. — Au-delà du paradigme des compétences, la modélisation comme principe organisateur de curricula

En Belgique francophone, comme dans d'autres pays, le courant dit « des compétences » s'est imposé depuis le début des années 2000. Il remet à l'honneur l'importance d'un apprentissage de la modélisation mathématique et c'est heureux. Cependant, on a pu observer une dérive liée à une emphase portée sur des aspects méthodologiques très génériques de la modélisation au détriment d'apprentissages proprement mathématiques. Schneider (2006a et 2006b) relève une anecdote significative de cette dérive.

Il y est question de ce que l'on appelle les « problèmes de dénombrement » au niveau des deux premières années de l'enseignement secondaire, dans les programmes scolaires belges ou dans les manuels. Ces problèmes, présents également dans les enquêtes PISA, supposent d'identifier d'abord une régularité dans une suite de nombres figurés par des objets et d'exprimer ensuite cette régularité par une formule susceptible de fournir le nombre d'objets à toute étape. Des professeurs de collège en formation continuée expliquent aux formateurs les difficultés de leurs élèves à résoudre de tels problèmes mais aussi leur propre malaise à gérer les mêmes questions mathématiques. Les formateurs les initient alors aux modèles fonctionnels impliqués dans ces questions, à travers les problèmes de dénombrement repris plus loin, ce que les professeurs apprécient car, disent-ils, cela les aide eux-mêmes à y voir plus clair dans le « fouillis » des problèmes qu'ils parviennent enfin à « catégoriser ». Ils expriment cependant leur impossibilité à travailler ces problèmes de la même façon avec leurs élèves faute d'un curriculum adapté et pour respecter l'injonction institutionnelle d'initier leurs élèves à résoudre des problèmes en leur enseignant une méthodologie globale composée d'étapes allant de *La lecture de l'énoncé* à la *Vérification de la solution* : « Si nous faisons la même chose avec nos élèves, ce ne sera plus pour eux de la résolution de problèmes », disent-ils.

Et pourtant, certains modèles fonctionnels sont accessibles à de jeunes élèves, en particulier les suites arithmétiques et géométriques, pour des raisons décrites dans la section suivante. Cette situation nous a engagés à concevoir un parcours longitudinal allant du Collège au Lycée et se poursuivant dans une institution supérieure d'économie et de gestion, lequel parcours subordonne les apprentissages algébriques à l'étude de modèles fonctionnels paramétrés. C'est ce que nous décrivons dans la section suivante, de manière globale avant de détailler, dans les sections ultérieures, certaines parties de ce parcours.

Terminons cette section en soulignant que la modélisation peut donc s'envisager sous bien des angles, celui de l'épisode relaté relève du courant des compétences et d'une idée prégnante dans cette sphère. Celle qu'il existerait des « compétences transversales », comme celle de la modélisation, dont l'acquisition consisterait à apprendre une méthodologie générale qui serait par la suite immédiatement disponible et applicable à n'importe quelle problématique de modélisation, quelle que soit la discipline considérée. Le point de vue adopté sur la modélisation dans cet article se démarque fortement du précédent et pour ainsi dire s'y oppose. En effet, comme en témoigne la suite de cet article, nous soutenons que modéliser est une activité spécifique à chaque problématique traitée, à ses spécificités épistémologiques, quand bien même des points de rencontre peuvent et doivent s'envisager entre différentes disciplines (dont l'économie et les mathématiques). Embrasser cette diversité épistémologique nous semble être une condition sine qua non, dans le cas de l'algèbre, pour lui permettre de dénoter d'une manière qui fasse sens pour les apprenants et autoriser à terme l'entrée dans une algèbre plus abstraite, dont les problèmes lui sont propres.

5. — Un parcours d'algèbre en synergie avec la modélisation fonctionnelle, en bref

Les suites arithmétiques et géométriques sont les premiers modèles fonctionnels susceptibles d'être identifiés dès la première année de l'enseignement secondaire. Ainsi, une suite arithmétique se traduit par des écarts constants d'un terme au suivant et la formule associée ne fait que de rendre compte du nombre de fois qu'il faut ajouter cet écart pour obtenir un terme donné, la multiplication étant identifiée comme une addition répétée. La régularité itérative d'un terme à l'autre se traduit alors par une fonction polynomiale du premier degré ainsi qu'illustré dans la section 6. Les suites géométriques ont une particularité analogue : la régularité itérative (on multiplie à chaque étape par le même nombre) se traduit par une puissance et donc une suite extraite d'un modèle exponentiel. Des questions bien ciblées (voir section 6) sur des suites arithmétiques offrent une première occasion de traiter tant des fonctions du premier degré, linéaires ou affines, que des équations du premier degré dont l'inconnue est un nombre naturel.

L'étude d'équations de type exponentiel attendra que le programme scolaire le permette mais, très tôt dans le secondaire, les suites géométriques peuvent être étudiées en osmose avec l'introduction des puissances à exposant entier (positif ou négatif) ou rationnel. À ce stade, le travail se polarise sur les tableaux numériques qui mettent en correspondance une suite arithmétique et une suite géométrique. Ainsi, sur base de contextes significatifs, on mettra en évidence que cette mise en correspondance perdure pourvu que l'on *décide* de bonnes définitions pour les puissances à exposants entiers négatifs ou rationnels. Ainsi, si l'exposant x passe de 1 à 0, puis à -1, la puissance a^x est divisée à chaque fois par a. De même, à la suite arithmétique des exposants : 0, 1/2, 1, doit correspondre une suite géométrique des puissances a^0, $a^{1/2}$, a^1. Les définitions de telles puissances découlent alors, non des axiomes d'une structure algébrique de haut niveau mathématique, mais bien du souhait d'étendre une régularité de type fonctionnel. Pour plus de précisions sur un tel parcours, nous renvoyons à Krysinska et Schneider (2010).

Quant à l'enseignement, d'une part, des nombres relatifs et de leurs opérations et, d'autre part, des fonctions du premier degré, il peut être couplé à la modélisation de mouvements rectilignes uniformes. L'intérêt de créer un seul modèle fonctionnel paramétré pour rendre compte de tous les mouvements rectilignes uniformes impose tout d'abord de distinguer toutes les règles liées à l'addition et la multiplication des relatifs. Ainsi, la création de ce modèle générique, $p = vt$, suppose non seulement de distinguer « avant » et « après » (p. ex. de se faire flasher par un radar sur une route rectiligne), que ce soit au niveau du temps ou de la position mais aussi de différencier, par le signe de la vitesse, des mouvements de voitures roulant en sens inverse. Ensuite ce choix de modélisation se paie du prix des règles liées aux opérations dans l'ensemble des nombres relatifs : ainsi, modéliser un tel mouvement par la formule du type $p = -2t$, outre l'avantage d'indiquer le sens du parcours, conduit, par exemple, au calcul $2 = (-2) \times (-1)$, le seul cohérent avec la propriété de dénotation de la formule. La description de cette ingénierie se trouve dans Job et *al.* (2014) et son analyse dans Schneider et *al.* (2015).

Les exemples précédents illustrent en quoi la modélisation fonctionnelle permet de s'affranchir d'une argumentation de règles numériques et algébriques trop exclusivement liées à des structures algébriques de niveau élevé comme celle de groupe au profit d'arguments pragmatiques (Job & Schneider, 2014), typiques de « praxéologies » (organisations mathématiques) de type « modélisation » au sens de Schneider (2008).

Le reste du parcours subordonne toutes les autres acquisitions algébriques à l'étude de classes de fonctions paramétrées en misant à la fois sur le registre graphique et le registre symbolique, comme illustré à la section 7.2 par l'étude des fonctions du second degré. Cette approche est développée dans Henrotay et *al.* (2015) en ce qui concerne les fonctions sinusoïdales, exponentielles et logarithmiques. Mais elle s'illustre et se justifie aussi dans une approche didactique qui va du calcul infinitésimal construit pour résoudre des problèmes extra et intra-mathématiques à plusieurs subtilités théoriques de l'analyse mathématique venant du souci d'en faire une discipline mathématique autonome (Schneider et al. 2016).

Ces parcours se fondent sur quelques choix d'orientation illustrés ci-dessous.

- Une synergie entre registre symbolique et registre graphique rend obsolètes certaines méthodes classiques de type algébrique concernant l'étude de fonctions. Ainsi, comme l'analyse Schneider (2016), étudier par l'algèbre le sens de la variation de la fonction $f(x) = 4 - (2x - 8)^2$ pour des valeurs de x supérieures ou égales à 4 est inutilement compliqué dès que les élèves connaissent l'écriture $y = a(x + m)^2 + l$ des fonctions du second degré et les caractérisations algébriques des affinités axiales et des translations. Ajoutons qu'il s'agit cependant de valider préalablement ces connaissances sans se contenter de constatations graphiques. On joue alors, là aussi, sur des justifications hybrides, ici d'ordre numérique ou relevant de la géométrie analytique (Schneider, 2008) :

  > « […] A ce stade, le discours technologique demeure cependant hybride, loin des théories standards : d'une part, des axiomes graphiques portant sur la représentation des fonctions de base, comme $y = x^2$, qu'il convient d'étayer de considérations numériques telles que *Si un nombre est inférieur à* 1, *son carré lui est inférieur*, considérations dont on peut tirer des informations sur la symétrie du graphe et même sa position par rapport à la bissectrice des axes et, d'autre part, du travail relevant de la géométrie analytique qui permet de définir les transformations en jeu et de prouver leur effet sur les expressions analytiques comme illustré ci-dessous » :

  $$y = x^2, \quad \begin{cases} y' = x \\ x' = x + 3 \end{cases}, \quad y' = (x' - 3)^2 .$$

- L'enseignement se polarise sur l'étude systématique, voire la construction, de classes paramétrées de fonctions. Chaque classe est introduite dans un contexte où elle joue un rôle privilégié en tant que modèle, par exemple les fonctions sinusoïdales en lien avec les phénomènes harmoniques, mais une décontextualisation progressive est visée au travers d'une pluralité de contextes pour autant que ceux-ci ne soient pas choisis trop artificiels.

- Les savoirs algébriques traités sont choisis pour leur utilité dans des contextes modélisés : des (in)équations irrationnelles simples sont utiles dans certains problèmes d'optimisation, par ex. pour choisir un trajet en ligne brisée (une partie en mer, l'autre sur terre) afin de minimiser le coût du transport qui varie d'un milieu à l'autre ; certaines identités trigonométriques sont utiles pour caractériser, d'une manière globale, l'ensemble des phénomènes périodiques qui sont harmoniques, le choix des équations trigonométriques, exponentielles et logarithmiques est dicté par l'étude des fonctions du même nom.

6. — Un premier focus sur les premières suites arithmétiques et géométriques

Comme cela a été dit *supra*, la première rencontre avec la pensée algébrique peut avoir lieu lors d'activités de modélisation des suites arithmétiques et géométriques. Elles peuvent être rencontrées lors de l'étude de certaines suites figurées qui portent naturellement une idée de variation et offrent ainsi un contexte pour l'introduction de la notion de *variable*. La régularité de ces suites fournit les conditions pour produire les premières expressions littérales dont certaines seront équivalentes, pour mettre en place les premières transformations algébriques et pour rencontrer les premières équations de type algébrique. Dans ce contexte, l'entrée dans la pensée algébrique prend appui sur la dénotation des lettres et des expressions littérales qui les contiennent : cette dénotation devient ainsi l'indice de l'usage de la lettre comme variable. La classification des suites et la catégorisation des expressions littérales conduisent à l'introduction des paramètres.

6. 1. *Production des premières expressions littérales*

La question suivante permet d'élaborer plusieurs programmes de calculs (Chevallard, 2005) qui sont équivalents.

Voici une suite de maisons construites avec des allumettes. Déterminez le nombre d'allumettes utilisées à n'importe quelle étape, par exemple à la 67^e^ *étape. À quelle étape utilisez-vous exactement* 117 *allumettes pour construire les maisons de cette suite (*Figure 1*) ?*

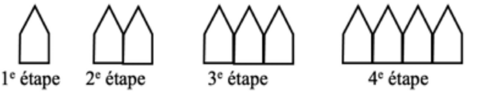

Figure 1

Dressons un tableau à deux entrées : le numéro d'étape et le nombre correspondant d'allumettes utilisées.

N° d'étape	1	2	3	4	5	…
Nombre d'allumettes	5	9	13	17	21	…

Tableau 1

La régularité du tableau est facilement observable. Mais le calcul lié à la suite des maisons se prête à des interprétations multiples, à cause de deux entités discernables : maisons et allumettes. Voici les stratégies possibles du calcul.

- Approche itérative : on reconnaît la loi de passage d'une étape à l'autre qui consiste à ajouter toujours quatre allumettes. Ainsi, après un certain nombre d'étapes, le nombre d'allumettes ajoutées est un multiple de quatre. À la première étape, il y a cinq allumettes. Aux suivantes, il faut ajouter quatre allumettes autant de fois qu'il y a d'étapes moins une. Le programme de calcul associé est :

$$5 + 4 \cdot (\textit{numéro d'étape} - 1).$$

- Approche fonctionnelle : on regarde la première maison au même titre que les autres : le comptage des maisons dicte celui des allumettes. À ceci près que toutes les maisons sont construites avec quatre allumettes sauf la première qui en comporte cinq. Le programme de calcul associé est :

$$1 + 4 \cdot \textit{numéro d'étape}.$$

- Une autre approche fonctionnelle : on observe que le nombre de maisons correspond au nombre d'étapes et que chaque maison utilise cinq allumettes ; on multiplie donc le nombre d'étapes par cinq. Mais comme deux maisons contiguës possèdent une allumette commune comptée ici deux fois, on doit la retirer autant de fois qu'il y a de passages d'une maison à l'autre. Le programme de calcul associé est :

$$5 \cdot \textit{numéro d'étape} - (\textit{numéro d'étape} - 1).$$

La conformité entre les comptages des allumettes selon ces trois programmes de calcul et le tableau ci-dessus peut être testée à l'aide de la dénotation du « *numéro d'étape* » : on remplace, dans chacun des cas, le « *numéro d'étape* » par un nombre naturel pour les quelques premières étapes de la suite concernée.

Pour répondre à la question « *À quelle étape, utilisez-vous exactement* 117 *allumettes ?* », le programme « 1 + 4 · *numéro d'étape* » est le plus simple pour être employé dans un calcul « à l'envers ». Cet intérêt de disposer de l'expression la plus simple justifie qu'on s'intéresse aux transformations d'un programme en un autre, transformations qui, en plus, ne modifient pas la dénotation. Ces transformations justifient le passage à l'écriture littérale des programmes de calcul pour réaliser une économie de pensée : une lettre à la place de « *numéro d'étape* » est une notation qui réduit un programme de calcul à une expression littérale aisément transformable. Ensuite, le choix des transformations se fait sur la base des valeurs numériques des expressions littérales qui doivent être conservées après les transformations. Dans le cas considéré ici, on obtient trois expressions littérales correspondant aux trois programmes de calcul avec la notation standardisée n pour la variable - nombre naturel :

$$5 + 4\cdot(n - 1),\ 4\cdot n + 1 \ \text{ et } \ 5\cdot n - (n - 1).$$

Pour garder leur équivalence sur la base de la dénotation, on doit accepter la règle de distribution du facteur 4 sur chacun des termes dans la parenthèse, la règle du changement de signe à l'ouverture de la parenthèse précédée du signe moins et la règle du regroupement des termes semblables.

La prise de valeurs numériques par la lettre n est un indice de son usage en tant que variable.

numéro d'étape	$5 + 4 \cdot (\textit{numéro d'étape} - 1)$	$1 + 4 \cdot \textit{numéro d'étape}$	$5 \cdot \textit{numéro d'étape} - (\textit{numéro d'étape} - 1)$
1	$5 + 4 \cdot 0 = 5$	$1 + 4 \cdot 1 = 5$	$5 \cdot 1 - (1 - 1) = 5$
3	$5 + 4 \cdot 1 = 9$	$1 + 4 \cdot 2 = 9$	$5 \cdot 2 - (2 - 1) = 9$
4	$5 + 4 \cdot 2 = 13$	$1 + 4 \cdot 3 = 13$	$5 \cdot 3 - (3 - 1) = 13$
5	$5 + 4 \cdot 3 = 17$	$1 + 4 \cdot 4 = 17$	$5 \cdot 4 - (4 - 1) = 17$

Tableau 2

En dehors de la notation standardisée n de la variable qui est un nombre naturel, des élèves proposent souvent d'autres lettres comme a ou x. Dans ce cas-là, on a l'occasion de se demander si les programmes de calcul comme $4 \cdot n + 1$ ou $4 \cdot a + 1$ ou $4 \cdot x + 1$ sont différents.

6. 2. *Introduction des paramètres*

Le classement demandé des quelques suites figurées proposées ci-dessous et prolongé par la catégorisation des formules associées aboutit à l'introduction de paramètres dans les expressions littérales. Ainsi, on est amené à différencier les rôles des lettres : variable indépendante ou variable-paramètre.

*Parmi les suites ci-dessous (*Figure 2*), lesquelles supposent des calculs semblables ?*

Dans les quatre exemples sur cinq présentés à la Figure 2, on rencontre deux régularités itératives particulières : l'une additive lorsqu'on passe d'une étape à la suivante en ajoutant un même nombre d'objets et l'autre multiplicative lorsqu'on passe d'une étape à la suivante en multipliant les objets par un même nombre. Ces deux régularités sont modélisées par quatre expressions littérales : $3n$, 2^{n-1}, $4n + 1$, $2 \cdot 3^n$. Elles sont catégorisées à l'aide de paramètres.

Les expressions $3n$ et $4n + 1$ sont reprises dans la forme paramétrée $an + b$. Cette forme caractérise toutes les suites additives dans lesquelles, pour passer d'un terme au terme suivant, on lui ajoute toujours un même nombre. Dans l'expression $a \cdot n + b$, a est le nombre qu'on ajoute à chaque étape et b est le premier terme de la suite.

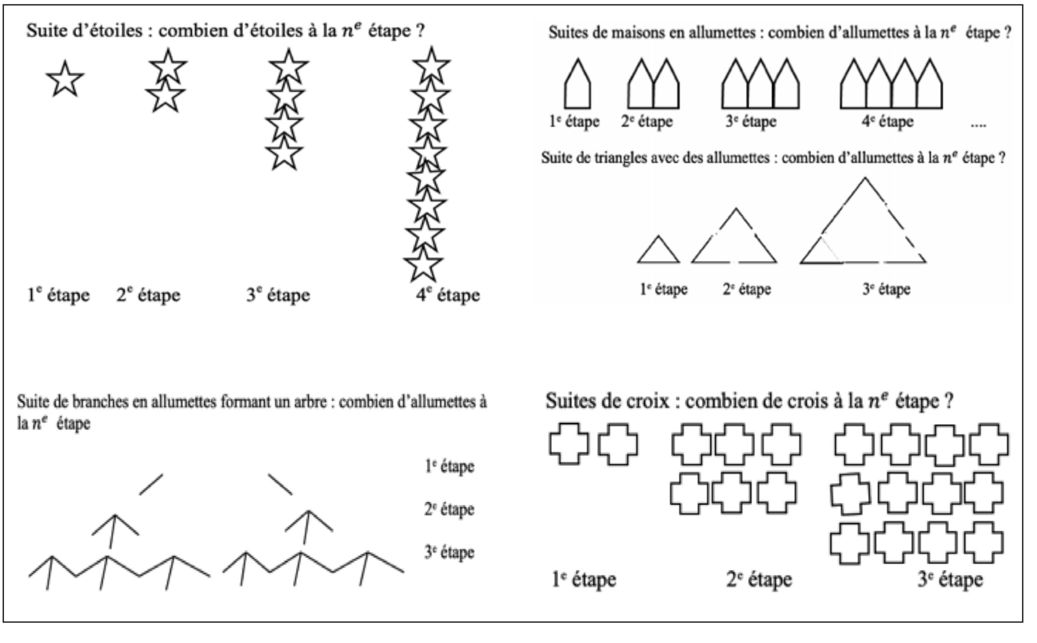

Figure 2

Les expressions 2^{n-1} et $2 \cdot 3^n$ sont reprises dans la forme paramétrée de l'expression $b \cdot a^n$. Cette forme caractérise toutes les suites multiplicatives dans lesquelles, pour passer d'un terme à l'autre, on le multiplie toujours par un même nombre. Dans l'expression $b \cdot a^n$, b est le premier terme de la suite et a est le nombre par lequel on multiplie à chaque étape.

L'usage de la lettre n comme variable et des lettres a et b comme paramètres introduit une hiérarchie dans la signification des lettres.

Les suites figurées traitées ci-dessus ont été analysées du point de vue didactique par Krysinska & *al.* (2009) et par Krysinska et Schneider (2010).

7. — Un second focus sur l'étude des fonctions du second degré

Approcher la pensée algébrique par la modélisation fonctionnelle offre des finalités comme le traitement de la classe des problèmes d'optimisation et la classe des problèmes se ramenant à une équation du type $f(x) = k$ ou à une inéquation du type $f(x) > k$. Ces deux finalités sont d'ailleurs proposées dans le document français Eduscole (2009). Dans ce document, on précise (p. 13) :

> *« Si un certain degré de maîtrise technique est à faire acquérir aux élèves et donc à travailler, il est essentiel, pour lui donner du sens, de toujours situer le calcul algébrique dans la perspective d'une résolution de problème, le fait d'associer à un problème une formule devant être obtenu des élèves eux- mêmes. Sur ce point précis, un objectif de formation prioritaire pour tout élève consiste à faire travailler l'intelligence du calcul, à donner des occasions de raisonner. Il est important de développer une aptitude à anticiper la forme de l'expression utile pour résoudre un problème. Pour ce faire, on peut conduire les élèves à réfléchir sur les différentes formes possibles que peut prendre une expression, en lien avec des courbes obtenues avec un traceur ou une calculatrice, et sur les questions auxquelles chacune de ces formes permet de répondre ».*

L'approche des fonctions du second degré par leur finalité justifie la hiérarchie du savoir algébrique, son organisation et l'adaptation du degré de maîtrise *des* techniques algébriques aux besoins de ces deux classes de problèmes.

Les trois exemples de problèmes présentés ci-dessous illustrent la proximité des questions d'optimisation et des questions menant à une équation puisqu'il s'agit de l'extremum et des racines d'une même fonction. Ils montrent aussi la diversité des contextes où le modèle du second degré est pertinent.

Un modèle dans le contexte cinématique.

> *On lance un objet verticalement avec la vitesse initiale de* 10 *m/s. On voudra connaître la hauteur maximale de l'objet et le temps de sa chute.*

Le modèle algébrique est $h = 10t - 4{,}9\,t^2$, où t est la variable désignant le temps.

Un modèle dans le contexte économique.

> *Un marchand de glaces vend* 400 *cornets par semaine à* 1,90 € *le cornet. Il a remarqué que chaque fois qu'il augmente son tarif de* 20 *centimes, il vend* 20 *glaces de moins par semaine. On suppose aussi que chaque fois que le marchand de glace diminue son tarif de* 20 *centimes, il vend* 20 *glaces de plus. On voudra connaître le nombre de cornets pour avoir un gain maximal et le nombre de cornets avec un gain nul.*

Le modèle algébrique est
$P = (1{,}9 + 0{,}2n) \cdot (400 - 20n) = -4n^2 + 38n + 760$

où n est la variable qui désigne le nombre de fois qu'on a augmenté ou diminué de 0,20 euro le prix initial de 1,9 euro et P désigne le gain du marchand.

Un modèle dans le contexte géométrique.

> *On considère tous les rectangles qui ont un périmètre de 12 cm. On voudra connaître les dimensions du rectangle d'aire maximale, s'il existe, et les dimensions du rectangle qui a une aire de 20 cm^2.*

L'aire A d'un rectangle quelconque qui a un périmètre de 12 cm est exprimée à l'aide de la formule $A = l(20 - l) = 20l - l^2$ où l désigne l'une des deux dimensions variables du rectangle.

7. 1. *L'importance des paramètres pour la modélisation fonctionnelle*

Les trois modèles ci-dessus peuvent être unifiés par leur appartenance à une même catégorie de modèles fonctionnels.

En effet, les transformations de l'expression $(1{,}9 + 0{,}2n)\cdot(400 - 20n)$ en l'expression équivalente $-4n^2 + 38n + 760$ et de $l(20 - l)$ en $20l - l^2$ permettent de voir que les trois formules $h = 10t - 4{,}9\,t^2$, $P = -4n^2 + 38n + 760$ et $A = 20l - l^2$ appartiennent à la même catégorie de formules représentée par la formule générale paramétrée du second degré exprimée en écriture standardisée

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Dans cette formule, la lettre x n'est plus une mesure de grandeur variable mais une variable numérique, sans lien avec un contexte quelconque. Cette formule est considérée comme modèle général fonctionnel du second degré. Ainsi, les questions concernant, par exemple, les extrema ou les racines de telles fonctions et les conditions de leur existence, peuvent être traitées d'un seul coup pour tous les cas possibles à travers l'étude de la classe de fonctions du second degré.

D'une manière générale, la classification des systèmes mathématiques ou extra - mathématiques permet de voir « pareilles » des choses différentes *a priori*, elle rend possible l'unification et la réduction des types de problèmes. En outre, les nouvelles connaissances obtenues à partir du travail sur un modèle sont valables pour tous les systèmes qu'il représente ou qu'il représentera.

Des possibilités de transférer un même outil mathématique d'un domaine à l'autre permettent une économie de pensée.

Le paramétrage apporte, en plus, la marge de liberté qui permet, momentanément, de ne traiter qu'une ou quelques contraintes à la fois et, par conséquent, de tenir compte des spécificités du problème. D'une manière générale, lorsqu'il s'agit de déterminer une fonction satisfaisant un certain nombre de conditions, on peut considérer que chaque condition détermine un «lieu» de fonctions. Les fonctions qui sont des solutions du problème doivent satisfaire à toutes les conditions et sont donc à l'intersection de ces « lieux » qui renvoient ou non, selon les cas, à un modèle fonctionnel plus général.

Et surtout, dans le cas qui nous intéresse ici, le paramétrage des formules permet de déduire des propriétés d'une classe de fonctions pour une fonction particulière ; on résout ainsi d'un seul coup non pas un seul problème, mais plusieurs. C'est une raison pour remplacer l'étude des fonctions une par une par celle des classes de fonctions.

L'étude de la classe des fonctions du second degré consiste à l'identifier algébriquement par la formule réduite $y = ax^2 + bx + c$, à établir son identité graphique et à interpréter géométriquement chacun des paramètres présents dans la formule. Cette étude fournira ensuite les techniques algébriques pour déterminer les extrema et pour résoudre les équations et les inéquations du second degré.

7. 2. *Étude de la classe des fonctions du second degré*

Les quelques éléments de cette étude ont été tirés du parcours didactique expérimenté et analysé par Krysinska, Schneider (2010). Ce parcours est composé d'une famille de situations-problèmes qui peuvent être " dévolues " aux élèves et qui débouchent sur le savoir visé.

Dans ce parcours, on transforme d'abord géométriquement la courbe de référence donnée par la formule $y = x^2$ et ensuite, on étudie les effets des transformations géométriques de la courbe sur cette formule pour aboutir à la forme canonique $y = a(x + \beta)^2 + \gamma$. Pour cela on utilise la technique d'ajustement des paramètres. Les transformations de la courbe de référence fournissent donc les raisons d'être de la forme canonique.

Ce parcours est différent du parcours dit classique dans lequel on transforme d'abord algébriquement le trinôme du second degré en forme canonique $(x + \beta)^2 + \gamma$ pour traiter d'abord les équations du second degré et ensuite, seulement, pour l'interpréter géométriquement.

On commence le parcours en explorant les courbes d'équation $y = ax^2 + bx + c$ pour conjecturer le rôle des paramètres. Voici les exemples de quelques conjectures proposées par les élèves :

Lorsque b varie dans les positifs, il y a un déplacement de la parabole vers la gauche. Lorsque b varie dans les négatifs (devient plus négatif) il y a un déplacement vers le bas à droite.

Plus a va être grand, plus la courbe va être pointue. Plus a est petit, plus la courbe va être plate ou plus a est grand, plus la parabole est étroite ; plus a est petit, plus la parabole est large.

(Le paramètre) c fait glisser la parabole sur l'axe des suivant le signe de (monter ou descendre). C'est le coefficient de translation.

Pour une même valeur de a, les paraboles ont toutes la même forme.

La courbe passe par le point (0, c). *(Le paramètre) c est l'ordonnée à l'origine.*

Ensuite, on formule des questions qui ont pour objectif d'organiser les arguments pour prouver ou pour réfuter les conjectures :

— On interprète géométriquement le rôle du paramètre *c*.

— On associe le paramètre *a* à la compression parallèle à l'axe des ordonnées.

— On met en place une technique pour associer la formule $y = (x - \beta)^2$ à la translation parallèle à l'axe des abscisses de β unités, appliquée à la courbe d'équation $y = x^2$.

— On traduit les effets de la composée de la dilatation verticale et de la translation horizontale sur l'équation $y = x^2$ en clarifiant ainsi le rôle du paramètre *b*.

Les deux questions ci-dessous sont tirées du parcours mentionné.

Dans la première question, on souhaite étudier les effets de la dilatation parallèle à l'axe des ordonnées sur l'équation $y = x^2$ de la courbe :

C*onsidérez la transformation du plan qui transforme le carré porté par les axes (*Figure 3) *en un rectangle de même base et de hauteur trois fois plus grande. Que devient* la courbe d'équation $y = x^2$ *après une telle transformation et quelle sera son équation* ?

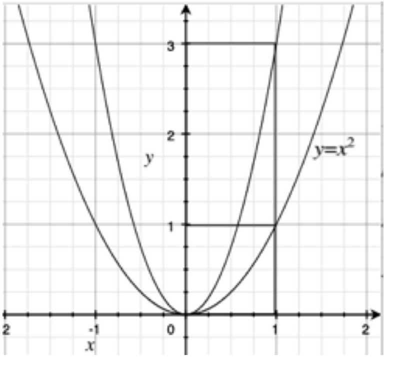

Figure 3

L'ordonnée de chacun des points de la courbe $y = x^2$ est multipliée par 3, donc le point d'abscisse x de la courbe transformée a pour ordonnée $3x^2$, ce qui signifie que la formule de la courbe transformée est $y = 3x^2$. Cette courbe est plus étirée que la courbe donnée par $y = x^2$.

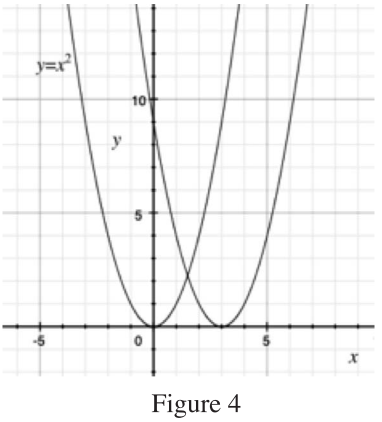

Figure 4

Dans la deuxième question, on étudie des effets de la translation parallèle à l'axe des abscisses de la courbe d'équation $y = x^2$:

On translate de trois unités vers la droite la parabole donnée par l'équation $y = x^2$ (figure 4). *Quelle est l'équation de la courbe translatée ?*

Nous présentons ici quatre techniques dont les deux premières ont été proposées par les élèves.

7. 2. 1. *Technique par ajustement*

Les étapes de cette technique sont représentées à la figure 5.

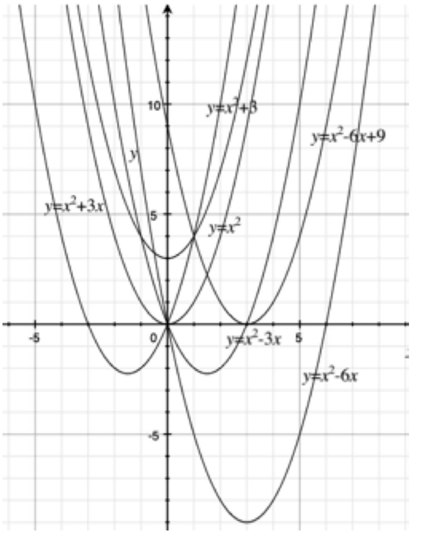

Figure 5

Comme on doit tenir compte du nombre « 3 » qui caractérise la translation, on commence par tester la formule $y = x^2 + 3$: la courbe correspondante est la translatée de la courbe initiale de 3 unités vers le haut, au lieu d'être translatée vers la droite.

Dans le deuxième essai, on teste la formule $y = x^2 + 3x$: la courbe associée à cette formule est mal placée : elle est à droite de la courbe de référence et trop bas. Modifions donc la formule en $y = x^2 - 3x$.

L'abscisse du sommet de la courbe associée à $y = x^2 - 3x$ est égale à 3/2. Or, elle devrait être égale à 3 : la courbe associée à $y = x^2 - 6x$ corrige cela.

Mais cette courbe est placée 9 unités trop bas. La formule $y = x^2 - 6x + 9$ tient compte de cette remarque: son graphique est la réponse recherchée.

7. 2. 2. *Technique numérique*

En comparant les coordonnées de quelques points qui se correspondent (Tableau *3*), nous établissons le lien algébrique entre leurs abscisses et ordonnées

courbe de référence		courbe translatée	
abscisses	ordonnées	Abscisses x	Ordonnées y
0	0	3	0
1	1	4	1
-1	1	2	1
2	4	5	4
-2	4	1	4
3	9	6	9
-3	9	0	9
			$y = (x-3)^2$

Tableau 3

7. 2. 3. *Technique graphique / géométrique*

Le schéma présenté figure 6 confirme la formule $y = (x - 3)^2$ comme associée à la courbe translatée.

7. 2. 4. *Technique par changement de variable*

Soit (x, y) les coordonnées d'un point quelconque de la parabole donnée par l'équation $y = x^2$ et (x', y') les coordonnées d'un point quelconque de la parabole translatée. Alors $y' = y$

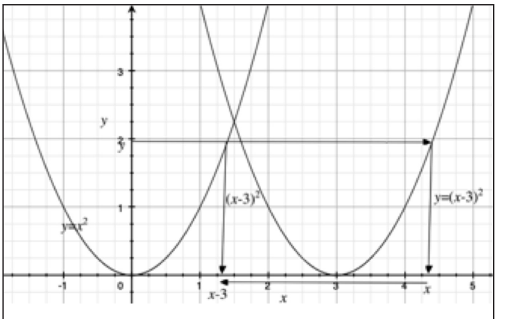

Figure 6

et $x' = x + 3$ d'où $x = x' - 3$. L'équation de la parabole translatée devient alors $y' = (x' - 3)^2$, ou, ce qui revient au même, $y = (x - 3)^2$ avec les notations standardisées, car les deux équations expriment la même covariation de l'abscisse et de l'ordonnée d'un point courant de la courbe translatée.

7. 3. *Réajustement du discours théorique au parcours didactique*

Il est important que les tâches considérées ci-dessus débouchent sur une étape d'institutionnalisation au cours de laquelle on identifie les connaissances qui peuvent être engagées par les élèves, comme « *celles qui ont un intérêt, un statut culturel* » (Brousseau, 1998). Pour assumer cette étape, il n'y a qu'une organisation mathématique en phase avec les tâches proposées et avec les techniques qui y sont mobilisées.

Ainsi, pour fixer et consolider le parcours didactique proposé dans un ensemble théorique structuré, le discours théorique peut être ajusté ainsi : on part des transformations géométriques de la parabole d'équation $y = x^2$ pour en déduire leurs effets sur cette équation et revenir *in fine* à l'interprétation géométrique des paramètres dans $y = ax^2 + bx + c$.

Le traitement des équations du second degré s'inscrit sans peine dans ce parcours puisque l'équation réduite et complète $ax^2 + bx + c = 0$ pour la solution de laquelle on manque de technique, peut être remplacée par l'équation équivalente canonique $a(x + \beta)^2 + \gamma = 0$ qui peut être résolue par les techniques algébriques élémentaires. Le passage de la forme réduite $ax^2 + bx + c$ à la forme canonique $a(x + \beta)^2 + \gamma$ et *vice versa* peut se faire par la technique d'ajustement des paramètres qui peut remplacer la technique plus difficile de la complétion au carré parfait.

7. 4. *Une étude raisonnée des extrema*

Dans la plupart des problèmes d'optimisation, on s'intéresse essentiellement à la valeur de la variable indépendante qui réalise l'extremum. Cela simplifie les calculs des solutions et permet de se passer des formules générales :

- dans le cas de la forme $y = a(x + \beta)^2 + \gamma$, l'extremum est atteint pour $x = -\beta$;
- dans le cas de la forme $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, l'extremum est atteint pour $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$;
- dans le cas de la forme $y = ax^2 + bx + c$, l'extremum est atteint pour la même valeur de x que l'extremum de $y = ax^2 + bx$ qui peut être considéré comme cas particulier du précédent : $y = ax\left(x + \dfrac{b}{a}\right)$.

7. 5. *Une étude raisonnée des équations du second degré*

Il n'y a que l'équation réduite et sous sa forme complète qui demande l'utilisation des formules générales de solutions. Dans tous les autres cas, on peut utiliser l'une des deux techniques de résolution des équations :

- Le calcul « à l'envers » dans les cas de $ax^2 + c = 0$,
- Les conditions pour que le produit de deux facteurs soit nul, dans le cas de $ax^2 + bx = 0$ ou $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

7. 6. *Une étude raisonnée des fonctions*

D'une manière générale, une étude raisonnée d'une fonction réelle consiste à adapter les outils de cette étude à la classe à laquelle elle appartient.

Ainsi, dans le cas des fonctions sinusoïdales identifiées par la formule $y = a\,sin(\beta x + \gamma) + c$, on s'intéressera à la période et à l'amplitude ; dans le cas des fonctions homographiques identifiées soit par la formule $y = \dfrac{ax + b}{x + d}$, soit par la formule $y = a + \dfrac{k}{x + d}$, on déterminera les deux asymptotes, l'une verticale et l'autre horizontale, et la position de la courbe par rapport aux asymptotes ; dans le cas des fonctions du troisième degré identifiées par $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, on s'intéressera à l'existence et au nombre des extrema ...

Dans le cas des fonctions du second degré, on déterminera le sens de la concavité, le maximum ou le minimum, l'existence ou non des racines. On les identifiera par l'une des trois formes algébriques : $y = ax^2 + bx + c$, $y = a(x + \beta)^2 + \gamma$ et, sous certaines conditions, $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Chacune de ces formes est porteuse d'informations différentes à utiliser lorsqu'on doit associer une formule à un graphique donné.

Par exemple, on associera plutôt la formule $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ ou la formule $y = ax^2 + bx$ au graphique a) de la 7, la formule $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ au graphique b), la formule $y = a(x + \beta)^2 + \gamma$ au graphique c) et la formule $y = ax^2 + bx + c$ au graphique d).

8. — Algèbre et modélisation au supérieur

8. 1. *Le phénomène d'étiquetage algébrique comme trait d'union entre secondaire et supérieur*

Les obstacles et difficultés, présentés dans les sections précédentes, dans le cadre de l'enseignement secondaire, ne s'évanouissent pas soudainement, lorsque l'élève devient étudiant et intègre l'enseignement supérieur. La problématique, dans son ensemble, tend, au contraire, à se « fossiliser » (Han, 2004) en faisant ressortir de manière forte et durable certains de ces obstacles et difficultés.

Partons du phénomène d'étiquetage algébrique évoqué précédemment, dans le cadre des fonctions réelles, pour montrer la manière dont il peut se décliner au supérieur, son ampleur et partant le regard que ce phénomène amène à porter sur la modélisation en relation avec l'algèbre.

Le phénomène d'étiquetage algébrique est bien présent au supérieur dans le cadre des fonctions réelles. En témoignent les difficultés tenaces d'étudiants mis à mal lorsqu'il s'agit d'indiquer sur un graphique de fonction où se situent l'image d'un point, ce point, le couple formé par le point et son image et ce qui distingue ces différents éléments. Dans l'esprit de ces étudiants, les écritures algébriques x, y, $f(x)$, $(x, f(x))$, … ne semblent pas reliées aux graphiques de fonctions d'une manière qu'ils puissent expliquer et justifier en s'appuyant sur la définition de graphe d'une fonction, mais

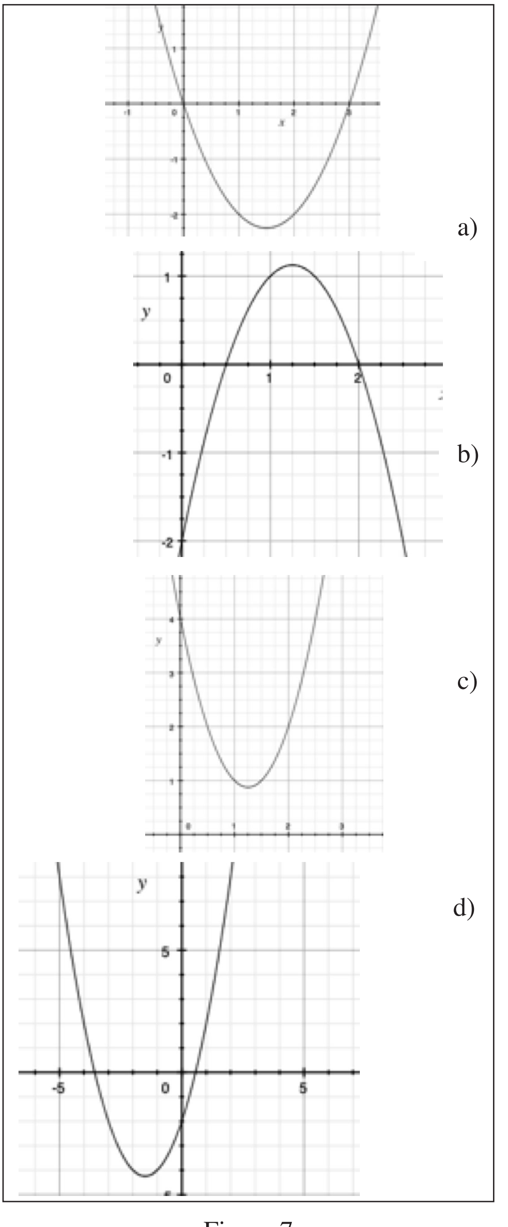

Figure 7

uniquement en référence à une pratique culturelle mimétique (Chevallard, 1985). On retrouve bien le même type de problématique que celle relevée au secondaire. Il y a cependant plus à en dire.

Le phénomène d'étiquetage algébrique ne se limite pas à l'aspect « statique » d'association entre un graphique et une étiquette algébrique, que nous venons d'évoquer, mais s'immisce également dans la profondeur de la pratique des mathématiques, à l'endroit où les gestes viennent outiller la pensée lorsqu'elle n'a pas encore été cristallisée par un formalisme qu'on s'est approprié et qui est partagé par nos interlocuteurs.

En attestent les confusions répétées entre la propriété qui permet de distinguer les fonctions au sein des relations et l'injectivité d'une fonction. Certains étudiants éprouvent des difficultés, partant des définitions algébriques de fonctions et d'injectivité, à déterminer dans quel « sens » il faut lire un graphique pour déterminer s'il est ou non fonctionnel et s'il est ou non injectif. Ainsi certains se demandent, pointant du doigt le graphique et effectuant des gestes, s'il faut « pour l'injectivité, partir des x pour regarder ce qui se passe sur les y ou bien s'il faut lire le graphique dans le sens contraire » ? Sous la pression de l'enseignant qui demande de justifier leur propos, certains de ces étudiants en viennent à apprendre, tant bien que mal, par cœur, les gestes qu'il convient d'effectuer pour se conformer aux demandes de ce premier. De telles pratiques montrent que le phénomène d'étiquetage algébrique ne se réduit pas à accoler une étiquette algébrique à un graphique mais pénètre également jusqu'au niveau des ostensifs que constituent les gestes mêmes par lesquels les éléments du domaine et du codomaine d'une fonction peuvent être mis en relation dans un discours visant à expliquer la manière particulière dont le non-ostensif fonction peut prendre une substance ostensive dans le croisement entre l'objet « graphique de fonction » et le symbolisme algébrique (x, y, $f(x)$, $(x, f(x))$, …).

Indiquons à présent comment le phénomène d'étiquetage algébrique peut également se déployer dans un cadre plus vaste que celui des fonctions réelles et combien la problématique du sens des symboles algébriques est profonde.

Les cours de logique auxquels nous avons eu accès mettent en évidence que, dans le cadre d'un enseignement du calcul des propositions, il est fréquent de rencontrer des étudiants qui éprouvent de grandes difficultés à se positionner par rapport aux écritures algébriques telles $a \vee b$ et $a \rightarrow b$. Ainsi certains se demandent s'ils peuvent écrire $b \vee a$ sachant que $a \vee b$ alors que dans le même temps ils peuvent assimiler, en certaines occasions, $a \rightarrow b$ avec $b \rightarrow a$ sans aucun questionnement, tout en se demandant également s'il est licite de noter $b \leftarrow a$ sachant que $a \rightarrow b$. Le recours aux tables de vérités employées pour définir les opérations du calcul des propositions aide à dissiper certains de leurs questionnements mais de manière ponctuelle. En effet, force est de constater que ces mêmes interrogations et erreurs associées refont surface témoignant ainsi d'une forme d'étiquetage algébrique où le sens d'une expression telle $a \rightarrow b$ semble, aux yeux de ces étudiants, relever au moins autant du positionnement « spatial » des symboles sur la feuille et de la graphie précise employée que des définitions posées par l'enseignant. Ainsi un étudiant peut s'avérer dans l'incapacité de transposer $a \rightarrow b \Longleftrightarrow \neg a \vee b$ à $b \vee a$ pour produire par exemple $\neg b \rightarrow a$. Les lettres employées semblent pour ainsi dire conditionnées dans leur possibilité d'emploi par l'occurrence visuelle initiale. Dans l'équivalence $a \rightarrow b \Longleftrightarrow \neg a \vee b$ c'est comme si certains étudiants la réduisaient à une écriture dont le

« sens » renvoie à lui-même et à la manière particulière dont les traces écrites qui la composent sont inscrites sur le papier. Ainsi de ce point de vue « visuel », $b \vee a$ ne relève pas du modèle « visuel » $\neg a \vee b$ car non seulement les lettres ne sont pas dans le « bon ordre » mais en plus il « manque » une négation à pour pouvoir « appliquer la formule » $a \rightarrow b \Longleftrightarrow \neg a \vee b$. La confusion de certains étudiants est encore plus grande lorsque l'enseignant annonce et démontre, par l'usage de tables de vérités, que non seulement $b \vee a \Longleftrightarrow \neg b \rightarrow a$ mais également $b \vee a \Longleftrightarrow \neg a \rightarrow b$. Ces derniers y voient non un aspect confortant de la cohérence du symbolisme, $\neg b \rightarrow a$ étant la contraposée de $\neg a \rightarrow b$ et donc équivalente, mais la marque d'une « contradiction » dans le discours de l'enseignant qui insistait préalablement sur le fait qu'on ne peut pas « renverser la flèche sous peine de confondre une implication avec sa réciproque ». En effet, aux yeux de ces étudiants dans $\neg b \rightarrow a$ la flèche va de b vers a alors que dans $\neg a \rightarrow b$ c'est le contraire, elle va de a vers b et « on ne peut pas renverser la flèche ».

8. 2. *De l'étiquetage algébrique à la modélisation pour traiter la question de la dénotation*

Ce développement sur le phénomène de l'étiquetage algébrique pointe de manière aigüe la question de la dénotation. Pour le formuler différemment, la pratique de l'étiquetage algébrique par les étudiants peut s'interpréter comme une adaptation qui vient pallier le fait que, de manière générale, les symboles algébriques ne dénotent pas ce qu'ils devraient dénoter dans un cours de mathématiques et en viennent pas glissements successifs à se dénoter eux-mêmes ou plus précisément à dénoter des « circonstances écrites d'emplois », ces circonstances jouant le rôle de non-ostensifs auxquels renvoient les ostensifs algébriques. Face à cette question de la dénotation, les activités de modélisation ne peuvent manquer de faire surface sous la forme générique suivante. Quelles tâches sont susceptibles d'amener l'utilisation et la constitution de symboles algébriques qui feraient sens pour les étudiants en leur apportant une économie de pensée (Bourbaki, 1960) qui se déclinerait, en termes d'instrumentalité de ces ostensifs (en ce compris les questions d'ergonomie) et/ou de sémioticité propre à éclairer la résolution de ces tâches ?

8. 3. *Tenir compte des contraintes propres au supérieur*

Si la ligne directrice est posée (modéliser pour permettre à l'algèbre de dénoter autre chose qu'un auto référencement d'une manière où les valences instrumentales et sémiotiques sont significatives), le cadre du supérieur est soumis à des contraintes qui ne sont pas nécessairement celles du secondaire et ne permettent pas forcément d'envisager l'enseignement de l'algèbre d'une manière identique à ce qui a pu être expérimenté au secondaire.

Notre prétention n'est pas, dans le cadre de cet article, de couvrir la totalité des institutions supérieures mais de pointer, dans celle où nous intervenons en tant qu'enseignant, certaines particularités écologiques suffisamment saillantes pour justifier l'intérêt de distinguer l'enseignement de l'algèbre dans le secondaire et au supérieur et les adaptations que cela demande de mettre en œuvre du point de vue de la modélisation et de l'algèbre.

Une contrainte forte rencontrée dans notre institution est liée au phénomène de vieillissement du savoir dont Chevallard (2001) fait état, soit l'inadéquation d'un savoir, d'une pratique, initialement parfaitement légitime du point de vue mathématique, avec le contexte écologique dans lequel il doit s'insérer. Les évolutions technologiques constituent un pourvoyeur important de vieillissement. Le développement des calculatrices de poche a, par exemple, rendu obsolète le recours aux tables de logarithmes, lorsqu'on se place d'un point de vue purement calculatoire. Une dimension similaire est à l'œuvre avec les calculatrices graphiques. Elles permettent d'obtenir immédiatement le graphique d'une fonction à partir de son expression algébrique et viennent de la sorte questionner l'activité mathématique elle-même. Il n'est pas rare de rencontrer des élèves/étudiants refusant en bloc un enseignement au motif que tel ou tel dispositif permet de résoudre le problème posé de manière automatique. Notre propos n'est pas de donner tort ou raison à l'un ou à l'autre mais de mettre en évidence le fait que le phénomène de vieillissement d'un savoir peut être le théâtre de dynamiques complexes.

Ainsi en va-t-il dans notre institution dans la direction suivante. A la suite de difficultés récurrentes et persistantes rencontrées par les étudiants face à des éléments de mathématique du secondaire considérés comme particulièrement élémentaires par les enseignants, une tendance adoptée plusieurs années de suite a été d'effectuer des rappels systématiques sur ces éléments au point d'occuper une place importante du premier cours de mathématiques de la première année. Sans entrer dans trop de détails, un chapitre entier était consacré aux fonctions du premier degré et un autre aux fonctions du second degré, au détriment de mathématiques qu'on pourrait considérer comme plus fondamentales dans la formation de futurs gestionnaires et économistes comme des problèmes d'optimisation sous contraintes.

Cette pratique des rappels a finalement été abandonnée, les difficultés rencontrées par les étudiants face à ces éléments de mathématique n'ayant guère évolué d'une année académique à l'autre. En seconde, une partie non négligeable des étudiants avait toujours autant de problèmes à déterminer l'équation d'une droite dont les coordonnées de deux des points sont données dans un repère cartésien, qu'en début de première année.

Le point saillant dans cette affaire est constitué par le retour des étudiants sur cette « politique des rappels ». Il ressort une forme d'ambivalence où s'opposent une approbation de la direction générale adoptée (faire des rappels) et un désintérêt lorsqu'il s'agit de suivre et participer aux cours consacrés à ces mêmes rappels : un nombre important d'étudiants annonçaient être démotivés par l'idée de revoir sous une forme similaire à ce à quoi ils avaient déjà été exposés des savoirs du secondaire. Plus précisément, les étudiants considérant être au point avec ces savoirs, jugeaient que le cours n'avait pas de plus-value pour eux et ceux qui avaient vécu des situations répétées d'échec face à ces mêmes savoirs ne voulaient pas rejouer le même scenario que précédemment et se désinvestissaient d'un enseignement qu'ils considéraient trop semblable au précédent et dont ils suspectaient qu'il les conduirait tout autant vers l'échec. On constate avec cet exemple à quel point cette question du vieillissement du savoir peut être déterminante dans la viabilité d'un enseignement. Nous rejoignons en cela le constat posé par Martin et Theis (2002, p. 52) :

> « *Des travaux en didactique des mathématiques ont mis en évidence certains phénomènes d'enseignement souvent liés à l'enseignement des mathématiques dispensé aux élèves en difficulté* (Brousseau et Warfield, 2002 ; Cange et Favre, 2003 ; Cherel, 2005 ; Conne, 1999 ; René de Cotret et Giroux, 2003). *Ces phénomènes d'enseignement sont notamment la rééducation par le recours à plus de problèmes du même type, l'algorithmisation et l'économie dans l'exposé des savoirs, le morcellement des contenus, la diminution des*

exigences et la simplification des situations, ainsi que le surinvestissement de certains contenus et l'insistance sur les préalables. Les élèves en difficulté se désengagent alors cognitivement des tâches mathématiques (Cherel, 2005 ; Perrin-Glorian, 1993 ; René de Cotret et Fiola, 2006), ce qui met en péril leur apprentissage des mathématiques[1]. »

8. 4. *L'économie pour redonner une épaisseur épistémologique à l'algèbre et lui permettre de dénoter : sortir de l'applicationisme*

L'approche adoptée pour tenter de sortir de l'ornière du vieillissement et tenter de redonner une viabilité écologique aux savoirs (dont ceux du secondaire, utiles pour le supérieur) a été de s'inscrire à la suite des auteurs cités dans Martin et Theis (2002) dans une vision systémique où (p. 52)

« l'élève rencontrant des difficultés est considéré au sein d'une institution (Lemoyne et Lessard, 2003). *Dans cette vision, l'enseignement des mathématiques vise le développement du potentiel d'apprentissage des mathématiques des élèves par le biais de situations qui demandent aux élèves de réfléchir et de construire des raisonnements* (Mary, Squalli et Schmidt, 2008)*, quitte à accepter, comme le mentionnent Cange et Favre* (2003)*, que l'élève ne dispose pas de tous les préalables mathématiques. L'activité de l'élève se trouve alors enrôlée dans des pratiques mathématiciennes* (Conne, 1999). *D'ailleurs, plusieurs auteurs sont favorables à l'idée de proposer des tâches mathématiques riches et complexes pour l'enseignement des mathématiques à des élèves en difficulté* (Blouin et Lemoyne, 2002 ; Lemoyne et Bisaillon, 2006 ; Mary et *al.*, 2008 ; Mary et Theis, 2007 ; René de Cotret et Fiola, 2006). »

1 C'est nous qui soulignons.

Plus précisément, il s'agit pour nous de prendre appui sur l'économie, qui est la filière de formation de notre institution et d'effectuer un renversement épistémologique qui consiste à passer d'un enseignement où l'économie est considérée comme une simple application des mathématiques, à un enseignement où l'économie vient servir d'assise sémantique aux mathématiques. Plus précisément, les ostensifs sont initialement introduits dans le cadre d'une activité de modélisation visant à leur permettre de dénoter des objets économiques d'une manière qui fasse sens pour les étudiants c'est-à-dire leur permettre notamment de piloter ces ostensifs sur base de la sémantique économique à laquelle ils renvoient. Illustrons le renversement dont il est question à l'aide des épisodes qui suivent. Le contexte global de travail est commun à ces différents épisodes. On dispose d'un certain budget pour acheter deux biens et on se demande quels achats sont ou non possibles étant donné ce budget.

8. 5. *Introduction des ostensifs* $p_1q_1 + p_2q_2 = B, \ldots$ *pour dénoter certaines facettes d'une problématique économique*

On souhaite acheter deux types de thé A et B qui valent respectivement 27 € et 59 € par kilo et on dispose pour cela d'un budget de 1113 €. On demande aux étudiants de répondre à des questions telles les suivantes :

1. Si j'achète 15 kilos du bien A et 12 kilos du bien B, combien ai-je dépensé ? Plus ou moins que le budget ? Exactement le budget prévu ?
2. Si j'achète 15 kilos du bien A et 10 kilos du bien B, combien ai-je dépensé ? Plus ou moins que le budget ? Exactement le budget prévu ?
3. Si j'achète 15 kilos du bien A et 14 kilos du bien B, combien ai-je dépensé ? Plus ou

moins que le budget ? Exactement le budget prévu ?

4. Si j'achète 20 kilos du bien A et 14 kilos du bien B, combien ai-je dépensé ? Plus ou moins que le budget ? Exactement le budget prévu ?
5. Si j'achète 15 kilos du bien A et 14 kilos du bien B, combien ai-je dépensé ? Plus ou moins que le budget ? Exactement le budget prévu ?
6. Si j'achète q_1 kilos du bien A et q_2 kilos du bien B, combien ai-je dépensé ?
7. Si j'achète q_1 kilos du bien A et q_2 kilos du bien B, quel test effectuer pour déterminer si le le budget alloué a été dépensé dans son intégralité ?
8. Si j'achète q_1 kilos du bien A et q_2 kilos du bien B, quel test effectuer pour déterminer si on dépasse le budget alloué ?
9. Si j'achète q_1 kilos du bien A et q_2 kilos du bien B, quel test effectuer pour déterminer si on a dépensé moins que le budget alloué ?
10. Si j'achète q_1 kilos du bien A et q_2 kilos du bien B, quel test effectuer pour déterminer si on ne dépasse pas le budget alloué ?

Les réponses aux questions 1 à 5 ne sautent pas forcément aux yeux comme cela aurait pu être le cas si on avait pris des valeurs suffisamment petites. Il faut faire un calcul. Ce calcul a toujours la même structure. Il s'agit de faire « 27 fois la quantité achetée du premier bien plus 59 fois la quantité achetée du second » et de la comparer au budget de 1113 euros pour déterminer si ce budget est ou non suffisant pour l'achat envisagé.

Le caractère répétitif des calculs sert en même temps de matériau expérimental et d'incitant (par effet de lassitude) à la généralisation demandée dans les autres questions.

Les questions 6 à 10 demandent de sortir du numérique pour aller vers la constitution d'un modèle qui permet d'écrire avec l'algèbre le type de calcul qu'il faudrait effectuer pour répondre aux questions précédentes. On passe donc de « faire un calcul » à « écrire le calcul qu'il faudrait effectuer » ce qui donne naissance aux ostensifs $27q_1 + 59q_2 = 1113$, $27q_1 + 59q_2 > 1113$, $27q_1 + 59q_2 < 1113$, $27q_1 + 59q_2 \leq 1113$ [2]. Le sens de ces ostensifs est donc donné par le contexte économique duquel ils émergent.

Partant de situations similaires, on peut légitimer les écritures plus générales : $p_1q_1 + p_2q_2 = B$, $p_1q_1 + p_2q_2 > B$, $p_1q_1 + p_2q_2 < B$, $p_1q_1 + p_2q_2 \leq B$ dans le même esprit. Elles constituent les tests à effectuer pour régler les interrogations relatives à un budget donné et englobent toutes les variations numériques possibles. Cette étape met en avant la généricité de l'approche algébrique.

D'autres questions peuvent être posées aux étudiants pour leur faire travailler l'aspect instrumental de ces ostensifs, comme les suivantes. Sachant qu'on achète 9 kilos du premier bien, combien peut-on acheter du second ? Si le prix au kilo du premier bien augmente de 5 euros, de combien de kilos doit-on diminuer la quantité du premier bien achetée pour ne pas dépasser le budget, sachant qu'initialement on avait acheté 15 kilos du premier et 12 du second ? Nous ne nous étendrons pas plus avant sur cet aspect afin de nous polariser sur l'émergence des demi-plans et mettre en relief l'apport de l'économie utilisée comme fondement sémiotique.

Relevons toutefois combien la mise au travail des étudiants pour leur faire éprouver l'ins-

2 On est donc proche de l'idée de programme de calcul développée notamment par Chevallard (2005).

trumentalité des ostensifs introduits s'inscrit dans le paradigme fonctionnel évoqué plus haut à propos du secondaire, et ce en lien avec la sémioticité et l'instrumentalité de ces mêmes ostensifs. En effet, répondre aux questions mentionnées ci-dessus (« Sachant qu'on achète 9 kilos du premier bien, combien peut-on acheter du second ? », ...) demande à l'apprenant de sortir, pour ainsi dire, $p_1q_1 + p_2q_2 = B$ d'un état où les différentes lettres font « jeu égal », pour différencier entre inconnues/variables et paramètres. Par rapport aux questions posées, p_1, p_2 et B désignent des quantités fixées ce qui induit un lien fonctionnel entre q_1 et q_2 (une valeur de l'une implique une valeur de l'autre) et un statut de variable, lien sur lequel il est possible de prendre appui pour répondre à ces questions où une des variables se voit alors assignée une valeur qui confère la possibilité pour d'autre d'être une inconnue. D'autres contextes sont susceptibles de modifier le statut et de faire apparaître cette fois p_1 et p_2 comme des inconnues/variables (prix unitaires maximals autorisés pour permettre d'acheter des quantités données des biens, ...).

Le croisement de ces différents contextes joue un rôle important pour les étudiants car cela les pousse à réinterroger continuellement ce à quoi renvoient les lettres employées, *au-delà du simple étiquetage*. Il ne suffit pas de mémoriser que p_1 désigne un prix unitaire pour pouvoir répondre à cette variété de questionnements. Encore faut-il avoir la conscience du rôle précis joué par ces lettres dans le contexte donné. Quel est le statut d'une lettre donnée ? S'agit-il d'un paramètre, d'une variable, d'une inconnue ? On peut saisir à cet endroit le jeu bidirectionnel d'interaction entre la sémioticité et l'instrumentalité des ostensifs en cause. Le contexte fait évoluer le contenu sémiotique qui autorise alors l'ostensif à déployer toute son instrumentalité. En retour, l'expérience de l'instrumentalité pousse à interroger le contenu sémiotique des ostensifs. La suite du parcours témoigne également de cette dialectique entre instrumentalité et sémioticité en lien avec la pensée fonctionnelle de mise en covariation.

8. 6. *De l'ostensif $p_1q_1 + p_2q_2 = B$ aux droites*

L'émergence des demi-plans s'appuie sur un travail préliminaire relatif aux droites. On demande aux étudiants de calculer une série de couples (q_1, q_2) qui épuisent (exactement) le budget et de les reporter dans un système d'axes cartésiens. On demande ensuite de déterminer quelle partie du plan est composée des couples qui épuisent le budget. Ces couples sont caractérisés par l'ostensif $27q_1 + 59q_2 = 1113$. Ils sont donc alignés.

Cela ne saute pas forcément aux yeux des étudiants. Il faut à certains un nombre conséquent de points pour se dire que l'alignement n'est pas un hasard. Nous reviendrons sur cette caractéristique dans ce qui suit en expliquant pourquoi elle n'est guère surprenante et les conséquences qu'on peut en tirer pour poursuivre l'activité de modélisation. Il est possible de justifier le fait que $27q_1 + 59q_2 = 1113$ soit caractérisé par une droite en continuant à travailler dans l'univers économique.

En bref, partant d'un couple (a_1, a_2) qui épuise le budget i.e. qui vérifie $27a_1 + 59a_2 = 1113$, si on augmente la quantité du bien A achetée pour u kilos, on souhaite déterminer de combien de kilos v il faudra diminuer la quantité du bien B achetée pour continuer à épuiser le budget. Cette interrogation peut se mettre sous la forme d'une équation à résoudre dont v est l'inconnue : $27(a_1 + u) + 59(a_2 - v) = 1113$. Comme (a_1, a_2) vérifie $27a_1 + 59a_2 = 1113$, l'équation se réduit à $27u + 59v = 0$ ce qui permet de conclure que $v = 27u/59$. Cette conclusion autorise l'application de la réciproque du théorème de Thalès pour garantir l'alignement des points satisfaisant l'égalité $27q_1 + 59q_2 = 1113$. Au niveau des étudiants, on ne pousse pas jusqu'à ce point l'argumentation, préférant rester autant que possible (pour cette partie) dans la sphère économique, en illustrant la manière dont se marque graphiquement la relation $v = 27u/59$ dont une conséquence est que lorsque $u = 1$, $v = 27/59$, ce quelle que soit les valeurs initiales de (a_1, a_2), ce qui signifie que le passage de (a_1, a_2) à $(a_1 + u, a_2 - v)$ s'effectue à pente constante. Les couples vérifiant $27q_1 + 59q_2 = 1113$ sont donc alignés.

Cet épisode sert de marchepied au suivant et permet d'établir un lien entre l'ostensif $p_1q_1 + p_2q_2 < B$ et les demi-plans.

8. 7. *De l'ostensif $p_1q_1 + p_2q_2 < B$ aux demi-plans*

Partant d'un achat (a_1, a_2) qui épuise le budget et donc vérifie $27a_1 + 59a_2 = 1113$, si on diminue la valeur de a_1 et/ou a_2, on effectue un nouvel achat (b_1, b_2) qui n'épuise plus le budget et donc vérifie $27b_1 + 59b_2 < 1113$. Réciproquement, tout achat qui n'épuise pas le budget peut être considéré comme « diminution » d'un achat qui épuise le budget. Les achats vérifiant $27q_1 + 59q_2 < 1113$ sont donc caractérisés par le fait qu'ils constituent des « diminutions » d'achat qui épuisent le budget i.e. ils s'obtiennent à partir d'un achat épuisant le budget en diminuant la quantité achetée d'un de des biens, voire des deux. Ce lien entre (a_1, a_2) et (b_1, b_2) relève de la même idée que celle employée ci-dessus lors du travail du lien entre l'ostensif $27q_1 + 59q_2 = 1113$ et une droite. Il s'agit dans les deux cas de considérer un achat donné comme variation[3] d'un achat précédent.

3 Il est intéressant de relever que l'approche consistant à étudier la manière dont varie v par rapport à u peut aussi être envisagée comme un prélude à l'introduction du concept économique de variation marginale. Nous en resterons à cette note afin de ne pas sortir du cadre de cet article.

Ce lien de « diminution » entre (a_1, a_2) et (b_1, b_2) peut alors être mis à profit graphiquement. En effet, graphiquement, diminuer a_1 et/ou a_2, donne un nouveau point (b_1, b_2) situé « en-dessous » de la droite composée des achats épuisant le budget. La partie du plan composée des achats obtenus par « diminution » des achats épuisant le budget est donc un demi-plan, le demi-plan situé en-dessous de la droite « épuisant le budget ».

Cet épisode nous semble emblématique du renversement évoqué plus haut nous faisant passer de l'économie envisagée comme application des mathématiques à l'économie utilisée comme pilote sémiotique des ostensifs. C'est l'interprétation des couples de coordonnées du plan comme étant des achats qui fait émerger de manière pour ainsi dire idoine l'idée qu'un achat vérifiant $27q_1 + 59q_2 < 1113$ peut toujours s'envisager comme « diminution » d'un achat épuisant le budget. Partant de ce développement, on peut évidemment procéder de même avec les variations $27b_1 + 59b_2 \leq 1113$, $27b_1 + 59b_2 > 1113$, $27b_1 + 59b_2 \geq 1113$.

La généralisation à l'ostensif $p_1q_1 + p_2q_2 < B$ et aux variations associées n'est guère problématique si on s'en tient à un contexte économique, mais demande un travail d'adaptation que nous ne détaillerons pas plus avant ici, lorsqu'on sort du contexte économique. Il faut en effet alors prendre en charge le fait que, de manière générale, si on sort du contexte économique, p_i, q_i et B peuvent être négatifs ce qui demande de prendre plus de soin dans l'adaptation du raisonnement effectué ci-dessus et amène à s'interroger sur la signification plus précise de « en-dessous ».

8. 8. *Travailler la non-unicité de la représentation d'une droite par une équation de type $p_1q_1 + p_2q_2 = B$*

Nous nous sommes déjà exprimés sur la manière dont les équations de droites peuvent s'envisager comme émergeant de pratiques de modélisation liées à l'économie. On peut compléter cette partie en contrastant les ostensifs de la forme $ax + by + c = 0$ avec ceux de la forme $y = ax + b$ et montrer à nouveau la façon dont modélisation et algèbre peuvent interagir. Ceci illustrera, par la même occasion, une nouvelle fois l'intérêt et l'importance de prendre en compte les spécificités écologiques des institutions considérées, lorsqu'on souhaite mettre en place des activités de modélisation.

Bien que la forme $ax + by + c = 0$ d'une équation de droite figure au programme du secondaire belge, elle semble délaissée au profit de la forme $y = ax + b$ adjointe à la forme $x = k$. À ce propos, Dunia (2014) analyse comment et pourquoi les enseignants occultent le changement de cadre, de l'étude des fonctions dans les réels où l'on insiste sur l'absence de pluralité d'images liées à un réel donné à la géométrie analytique où le choix du repère ne discrimine plus les droites dont l'équation a la forme $x = k$.

On peut envisager au moins deux raisons à cet état de fait, liées à la plus grande ergonomie de la seconde forme dans un contexte institutionnel largement dominé par les pratiques ostensives.

Premièrement, à une droite du plan muni d'un repère cartésien, correspond une infinité d'équations de la forme $ax + by + c = 0$. Faire l'impasse sur cette forme ou du moins minimiser sa visibilité dans les pratiques enseignantes permet précisément d'éviter la question du traitement de cette non-unicité qui peut s'avérer délicate dans un contexte où, au moins sur le plan algébrique, ce sont les fonctions qui dominent largement et avec l'idée implicite qu'un objet géométrique est désigné par une équation et certainement pas une infinité.

En outre, cette non unicité algébrique peut conduire à des traitements plus complexes qu'avec la forme $y = ax + b$. Qu'on pense simplement à la résolution générique du système :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

versus le système :

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = a'x + b' \end{cases}.$$

Les cas de figure à envisager dans le second système sont moindres que dans le premier.

Deuxièmement, la forme $y = ax + b$ offre une opportunité immédiate de « donner du sens » (ostensif) à a et b : l'un est l'inclinaison de la droite et l'autre son ordonnée à l'origine. Cette possibilité de « donner du sens » (sans forcément justifier ces affirmations) peut en renfort du point précédent offrir l'opportunité de réduire la question du sens de « $y = ax + b$ » à la seule possibilité d'« interpréter » graphiquement à moindres frais a et b. Pour le dire platement, $y = ax + b$ se prête volontiers à l'ostension gaphico-visuelle, au contraire de $ax + by + c = 0$.

Ce qui constitue des éléments à charge de $ax + by + c = 0$ dans une approche ostensive nous semble au contraire offrir les opportunités suivantes dans la perspective de modélisation qui est la nôtre.

Premièrement, les étudiants ne sont pas aussi familiers avec $ax + by + c = 0$ qu'ils ne le sont avec $y = ax + b$. Les effets de vieillissement du savoir sont donc moins susceptibles de se faire sentir [4]. C'est notamment sur cette caractéristique que nous nous sommes appuyés ci-dessus dans le travail de la correspondance entre $p_1q_1 + p_2q_2 = B$ et une droite.

4 Rappelons que certains étudiants n'ont pas conscience que $p_1q_1 + p_2q_2 = B$ peut être représenté par une droite.

Deuxièmement, la non unicité de la représentation d'une droite à l'aide de $ax + by + c = 0$ peut être considérée comme une opportunité pour travailler les particularités du modèle que constitue $p_1q_1 + p_2q_2 = B$ et approfondir le travail de modélisation initié préalablement.

Voici les grandes lignes de questions qui peuvent être mises à contribution pour implémenter cet approfondissement.

On donne une droite de budget, i.e. une droite issue d'un ostensif de la forme $p_1q_1 + p_2q_2 = B$, comme celle représentée sur la Figure 8 :

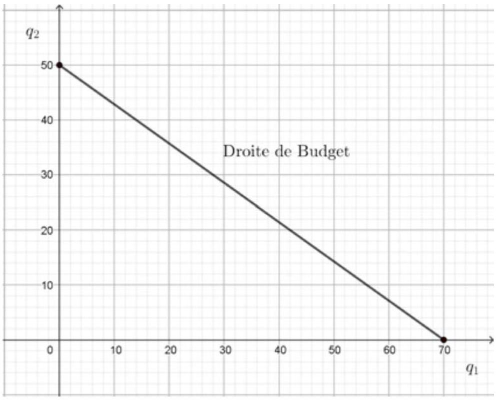

Figure 8

On demande de déterminer le budget à partir de la représentation graphique donnée. Il n'est évidemment pas possible de répondre à cette question sans information complémentaire, précisément parce qu'il existe une infinité d'ostensifs de la forme $p_1q_1 + p_2q_2 = B$ dont la représentation est donnée par la droite de la Figure 8.

On peut néanmoins s'attendre à des réponses de la part d'étudiants de type : « Le budget vaut 350 euros car l'équation de la droite est $5q_1 + 7q_2 = 350$ ». Le travail consiste alors à offrir l'opportunité aux étudiants de questionner ce type de réponse, ce qui peut s'envisager à l'aide des éléments suivants. On donne différents contextes, par exemple $p_1 = 70$, $p_2 = 50$, $B = 3500$ et $p_1 = 14$, $p_2 = 10$, $B = 700$, qui conduisent tous à la même droite de budget pour casser l'ubiquité de $5q_1 + 7q_2 = 350$ et ainsi l'idée que nécessairement le budget initial est de 350 euros.

Cette mise en perspective peut être appuyée en procédant au même type de questionnement vis-à-vis des prix au kilo des deux thés, pour en conclure qu'ils ne peuvent pas se déduire de la seule information graphique donnée, non plus. Ce travail de mise en perspective permet de motiver la question suivante. De quelle(s) information(s) supplémentaire(s) doit-on disposer pour déterminer le budget à partir du graphique et de même avec les prix d'achat au kilo ? Ce nouveau questionnement est important dans la mesure où il permet de relativiser l'ubiquité des graphiques et dans le même temps, par effet de contraste autorise à mettre en action les ostensifs algébriques et faire sentir l'instrumentalité particulière dont ils sont susceptibles. Partant de $p_1q_1 + p_2q_2 = B$ et du fait que $(70, 0)$ et $(0, 50)$ font partie de la droite de budget, on en déduit que $70p_1 = B$ et $50p_2 = B$.

Combinant ces deux résultats on peut en tirer un troisième : $p_2 = \frac{7}{5}p_1$. Ces nouveaux ostensifs montrent que p_1, p_2 et B peuvent s'exprimer comme fonction les uns des autres. La connaissance de l'un implique la connaissance des deux autres. On peut pousser un cran plus loin l'étude de la question, toujours au plan algébrique en injectant les expressions de, par exemple, p_2 et B dans $p_1q_1 + p_2q_2 = B$ pour obtenir

$p_1q_1 + \frac{7}{5}p_1q_2 = 70p_1$ et par suite $p_15q_1 + p_17q_2 = p_1350$ donnant ainsi de la substance au fait qu'une même droite n'est caractérisée par les ostensifs algébriques considéré qu'à une constante multiplicative près.

Ce type de travail peut se poursuivre au niveau des demi-plans pour faire émerger la conscience qu'un demi-plan n'est caractérisé par un ostensif de la forme $p_1q_1 + p_2q_2 < B$ qu'à une constante multiplicative près également.

Travailler la non unicité des ostensifs $p_1q_1 + p_2q_2 = B$ et $p_1q_1 + p_2q_2 < B$ peut s'envisager comme une facette de travail de falsification propre au développement de modèles scientifiques (Popper, 1959).

8. 9. *Quelques questions sur le renversement épistémologique mis en œuvre*

Les éléments ébauchés ci-dessus indiquent comment on peut penser un enseignement des mathématiques à destination de futurs gestionnaires, en choisissant comme fil conducteur la modélisation de problèmes à caractère économique. Pour faire écho à ce qui précède, l'entreprise de modélisation adoptée se distingue d'une simple mise en œuvre d'une hypothétique « compétence transversale de modélisation », pour s'inscrire dans un état d'esprit de questionnement du monde (Chevallard, 2015). Cet état d'esprit prend appui, pour constituer ses ostensifs algébriques, de manière centrale sur l'économie qui assure, au moins initialement, le portage du sens. Les modèles obtenus sont de véritables modèles au sens de Popper dans la mesure où ils sont inscrits dans une démarche de mise à l'épreuve comme en témoigne le questionnement appliqué à l'association entre l'ostensif $p_1q_1 + p_2q_2 = B$ et les droites du plan et de même pour $p_1q_1 + p_2q_2 < B$ et les demi-plans. Un tel projet de subordonner la genèse d'ostensifs algébriques à l'économie ne va pas sans poser quelques questions dont la première est la suivante.

S'il nous semble légitime d'envisager l'économie comme fondation sémiotique initiale d'une mathématisation, la question est également posée de déterminer la manière de détacher, à terme, mathématique et économie pour permettre de donner à cette dernière toute la puissance dont elle est susceptible, sachant que le contexte économique peut à un moment faire obstacle si les étudiants en viennent à lui porter un trop grand attachement, porteur de restrictions dans la manière dont ils autorisent les ostensifs algébriques à dénoter.

La question terminale soulevée par l'approche rapportée tient à une forme de paradoxe. Tenant compte de l'écologie propre au supérieur dans notre institution, dans sa composante de vieillissement du savoir, nous avons adopté l'économie comme support de la mathématisation. À rebours cependant, une certaine tradition évoquée plus haut d'applicationisme tend à reléguer l'économie au rang d'application des mathématiques, comme si cette dernière n'avait de légitimité qu'une fois mathématisée et ne pouvait se penser que mathématisée.

L'expérience montre qu'une telle prise de position est répandue chez les enseignants, quoique parfois de manière implicite, et tend d'une part à réduire la mise en œuvre d'une démarche de modélisation à quelques exercices stéréotypés où l'enseignant montre sur un modèle comment reproduire la « modélisation » attendue et d'autre part, pousse, en concomitance ces mêmes enseignants à ne pas considérer comme une activité de modélisation légitime les éléments exposés plus haut, au motif d'un manque de rigueur que nous interprétons comme une incapacité à penser en dehors de mathématiques déjà constituées et donc du paradigme de visite des œuvres, comme si élaborer « from scratch » un modèle « imparfait », à faire évoluer rendait coupable d'avoir « commis des erreurs » et propagé des « théorèmes faux ». On ne peut s'empêcher d'établir un parallèle entre ce type de prise de position et certaines tendances de nos sociétés qui voudrait évacuer toute forme de risque et le faire tendre vers zéro. Cette dernière interrogation pointe le fait que la question de la dénotation peut être impactée de manière significative par le rapport entretenu par une institution d'enseignement supérieur, en tant que corps professoral, à la question de la modélisation et donc de l'importance de la prise en compte des contraintes écologiques situées dans des parties hautes de l'échelle des niveaux de codétermination (Chevallard, 2002).

Bibliographie

Artigue, M. (2015). Enseignement et apprentissage de l'algèbre au collège : quel apport pour les TICE ? *Revue de l'APMEP*, 514 326-340.

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objets d'étude et problématique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 77-124.

Bosch, M., & Gascon, J. (2002). Les praxéologies didactiques : théories et empiries. Dans Dorier, J.-L., Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R., & Floris, R. (dir.). Actes de la XIe École d'Été de Didactique des Mathématiques qui s'est déroulée à Corps (France) du 21 au 30 août 2001. Grenoble (France) : La Pensée Sauvage. https://revue-rdm.com/ouvrage/actes-de-la-xieme-ecole-d-ete-de-didactique-des-mathematiques/

Bourbaki, N. (1960). *Éléments d'histoire des mathématiques*. Paris (France) : Hermann.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble (France) : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1984), Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège : première partie : l'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, 5, 51-94.

Chevallard, Y. (1985). *La Transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble (France) : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1988). Notes sur la question de l'échec scolaire. Publication n°13 de l'IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège : deuxième partie : la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 43-72.

Chevallard, Y. (2001). Enseignement insensé, enseignement raisonné et créativité sociale. *Bulletin de l'APMEP*, 435, 526-539.

Chevallard, Y. (2002). Les praxéologies didactiques. Écologie & régulation. Dans Dorier, J.-L., Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R., & Floris, R. (dir.). Actes de la XIe École d'Été de Didactique des Mathématiques qui s'est déroulée à Corps (France) du 21 au 30 août 2001 (pp. 41-56). Grenoble (France) : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2005). Journal du séminaire DSMF, non publié.

Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm. Dans S. Cho (Ed.). Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education (pp. 173–187). Seoul (Corée) du 8 au 15 juillet 2012. Springer International Publishing.

Dunia, A. (2014). *De l'écologie d'un discours heuristique d'acculturation à l'algèbre linéaire* [Thèse de doctorat, Université de Liège].

Eduscole (2009). Ressources pour la classe de seconde, Fonctions. https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Programmes/18/1/Doc_ressource_fonctions_109181.pdf.

Gascon, J. (1993). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». *Petit x,* 37, 43-63.

Han, Z.-H. (2004). Fossilization: Five central issues. *International Journal of Applied Linguistics*, 14(2), 212-42.

Henrotay, P., Krysinska, M., Rosseel, H., & Schneider, M. (2015). *Des fonctions taillées sur mesure.* Liège (Belgique) : Presses Universitaires de Liège.

Job, P., Licot, A.–F., Rosseel, H. & Schneider, M. (2014). Comment donner du sens aux nombres relatifs et à leurs opérations grâce à un contexte « concret », *Losanges***,** 25, 43–52.

Job, P., & Schneider, M. (2015). Empirical positivism, an epistemological obstacle in the learning of calculus. *ZDM Mathematics Education*, 46, 635-646. https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-014-0604-0

Krysinska, M., & Schneider, M. (2010). *Émergence de modèles fonctionnels.* Liège (Belgique) : Presses Universitaires de Liège.

Krysinska, M., Mercier, A., & Schneider, M. (2009). Problèmes de dénombrement et émergence de premiers modèles fonctionnels. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *29*(3), 247–303. https://revue-rdm.com/2009/problemes-de-denombrement-et/

Martin, V., & Theis, L. (2014). La résolution d'une situation-problème probabiliste en équipe hétérogène : le cas d'une élève à risque du primaire. *Nouveaux cahiers de recherche en éducation*, 14(1), 49-70.

Mercier, A. (1996). *L'algébrique, une dimension fondatrice des pratiques mathématiques scolaires. Dans* Noirfalise, R., Perrin-Glorian, M.-J. (dir.). *Actes de la VIIIe École d'été de Didactique des mathématiques* qui s'est déroulée à Saint-Sauves d'Auvergne (France) du 22 au 31 août 1995. Clermont-Ferrand (France) : IREM de Clermont-Ferrand. https://publimath.univ-irem.fr/biblio/IWD95001.htm

Polya, G. (1967). *La découverte des mathématiques.* Paris (France) : Dunod.

Popper, K. R. (1959). *The logic of scientific discovery.* London (England) : Hutchinson & Co.

Radford, L. (2015). La pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation. Dans Theis Laurent. (dir.), *Les différentes pensées mathématiques et leur développement dans le curriculum.* Actes du colloque Espace Mathématique Francophone (EMF) qui s'est déroulé à Alger (Algérie) du 10 au 14 octobre 2015 (pp. 334-345). Alger (Algérie) : Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, Société Mathématique d'Algérie. https://publimath.univ-irem.fr/biblio/ACF15083.htm

Sackur, C., Drouhard, J.-P., Maurel, M., & Pécal, M. (1997). Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire ? *Repères IREM*, 28, 37-68.

Schneider, M. (1988). *Des objets mentaux 'aires' et 'volumes' au calcul des primitives.* [Thèse de doctorat, Université de Louvain-la-Neuve].

Schneider, M. (2006a). Quand le courant pédagogique « des compétences » empêche une structuration des enseignements autour de l'étude et de la classification de questions parentes. *Revue Française de Pédagogie*, 154, 85-96.

Schneider, M. (2006b). Comment des théories didactiques permettent-ils de penser le transfert en mathématiques ou dans d'autres disciplines ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26(1), 9-38.

Schneider, M. (2008). *Traité de didactique des mathématiques.* Liège (Belgique) Presses Universitaires de Liège.

Schneider, M., Job, P., Matheron, Y., & Mercier, A. (2015). Extensions praxémiques liées aux ensembles de nombres : des complexes aux relatifs. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 20, 9-46.

Schneider, M. (2016). Des recherches qui articulent calculus et analyse. Dans Matheron, Y., Gueudet, G., Celi, V., Derouet, C., Forest, D., Krysinska, M., Quilio, S., Rogalski, M., Sierra, T., Trouche, L., Winsløw, C., & Besnier, S., E*njeux et débats en didactique des mathématiques.* Actes de XVIIIe école d'été de didactique des mathématiques qui s'est déroulée à Brest (France) du 19 au 26 Août 2015 (pp. 19-45). Grenoble (France) : La Pensée Sauvage. https://revue-rdm.com/ouvrage/enjeux-et-debats-en-didactique-des-mathematiques/

Schneider, M., Balhan, K., Gerard, I., & Henrotay, P. (2016). *Du calcul infinitésimal à l'analyse mathématique.* Liège (Belgique) : Presses Universitaires de Liège,

Vlassis, J., & Demonty, I. (2002). *L'algèbre par des situations-problèmes au début du secondaire.* Bruxelles (Belgique) : De Boeck & Larcier.