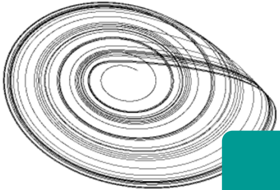
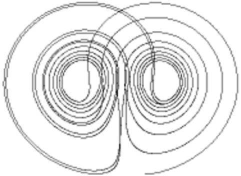


Hamilton, Lagrange, le chaos

Cette Mécanique dans nos mouvements

Fabien Buisseret

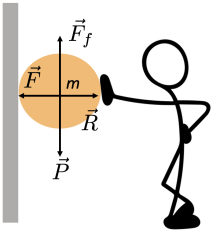
CeREF Centre de Recherche et de Formation Haute École Louvain en Hainaut
HELHa Haute École Louvain en Hainaut
UMONS Université de Mons
UBFC Université Bourgogne Franche-Comté



Avant-propos

Êtes-vous suffisamment Mécanique ?

- La Mécanique propose des principes mathématiques décrivant les mouvements d'objets a priori inanimés.



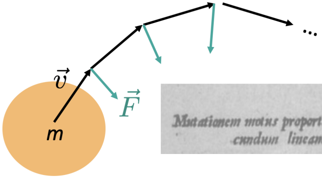
- Les systèmes vivants sont composés de tels objets + quelque chose de plus.
- Si nous pouvons choisir de ne pas suivre la Mécanique, pourquoi le faire ? $\leadsto$ Contrôle moteur : quels principes dynamiques régissent la réalisation de nos mouvements volontaires ?

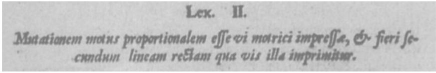
Marcher avec Newton

Seconde loi de Newton (1687)

$$\sum_i \vec{F}_{\mathrm{ext},i} = m\ \vec{a}, \text{ with } \vec{a} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}.$$

- Conditions initiales ; $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ et $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$.

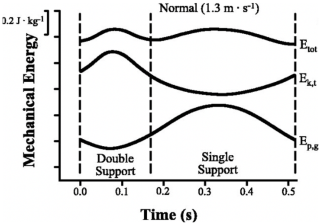


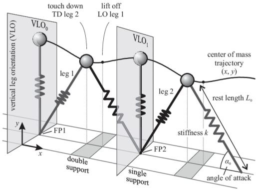

Lex. II.
Mutationem motus proportionalem eſſe vi motrici impreſſæ, & fieri ſecundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

- La trajectoire $\vec{x}(t)$ est "générée" par les forces externes au départ des conditions initiales.
- L'énergie totale $E = E_k + E_p$ est constante en l'absence de force dissipatives.

Masse-ressort et marche

- La trajectoire verticale du centre de masse du corps durant la marche $\sim$ système masse-ressort inversé. [OF05, RBM$^+$10]

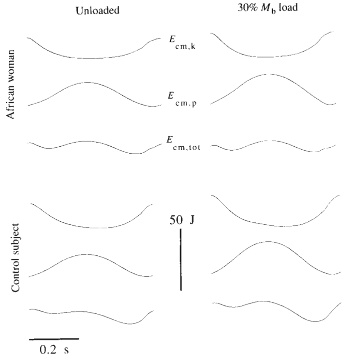




- Aussi applicable durant le saut et la course [Bli89].
- Notons que l'énergie n'est pas exactement conservée – décalage max/min de E_k et min/max de E_p.

Masse-ressort et marche

- Intérêt de minimiser ce décalage ?



- Certaines femmes africaines conservent mieux leur énergie totale... [HWPC95].

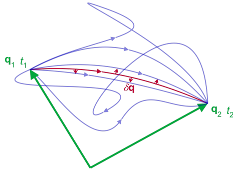
L’optimisme de Lagrange

Lagrange (1736-1813)

- Parmi toutes les trajectoires commençant en $\vec{x}_i$ et se terminant en $\vec{x}_f$, celle qui est effectivement réalisée minimise l'action $S = \int_{t_i}^{t_f} L(\vec{x}, \vec{v}, \ldots)\, dt$, soit

$$\delta S = 0.$$

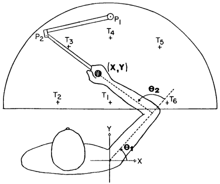
- Principe de moindre action



- Typiquement, $L = E_k - E_p$. Les ingénieurs parleraient de “fonction coût”.
- Mouvement volontaire : est-ce que notre cerveau intègre une action ?
  Proposé dans la théorie du contrôle optimal [TJ02].

Jerk et tâches de pointage

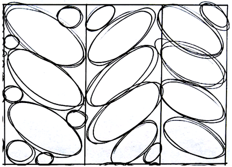
- Proposition : dans un mouvement volontaire de pointage d'un point à un autre, l'action $S = \int_{t_i}^{t_f} \vec{j}^{\,2}\, dt$ est minimisée, avec le jerk $\vec{j} = \frac{d\vec{a}}{dt}$ [FH85].



- C'est une action non-standard au sens du physicien. De telles actions, contenant des dérivées de la position plus élevées que la vitesse, n'ont généralement pas de trajectoire stable. Quelques actions peuvent y mener toutefois [BBDW19].
  $\rightsquigarrow$ L'étude du mouvement humain peut aussi motiver des études en mécanique "pure".

Higher derivatives

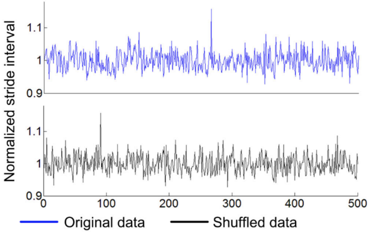
- Le jerk seul n'admet pas de mouvement stable. Une action non-standard peut le faire [FH07]
$$S = \int_{t_i}^{t_f} \left(\vec{a}^{\,2} + \omega^2 \vec{v}^{\,2}\right)\, dt.$$
Elle se rattache aux oscillateur de Pais-Uhlenbeck [PU50].
- Ce principe variationnel prédit la loi 2/3 observée dans un grand nombre de mouvements volontaires : $v \sim \kappa^{-1/3}$ avec κ la courbure.
Historiquement découverte chez des individus sains dessinant des ellipses [LTV83] !



Variabilité

Revenons à la marche et demandons à quelqu'un de marcher durant ~ 500 cycles.

- Il s'agit d'un mouvement borné, quasi-périodique, avec des fluctuations non-aléatoires [HPL⁺95, AH13].



- Exposant de Hurst [Hur51] autour de $H = 0.75$, typique de systèmes chaotiques. H est une mesure des autocorrélations dans la variabilité d'un système. $H = 0.5$ des processus aléatoires, $0.5 < H < 1$ pour des processus autocorrélés.
- Pour des systèmes vivants, $L = L(\ldots, t) \rightsquigarrow$ Peut-on identifier des grandeurs conservées ?

Attiré par Hamilton

Hamilton (1805-1865)

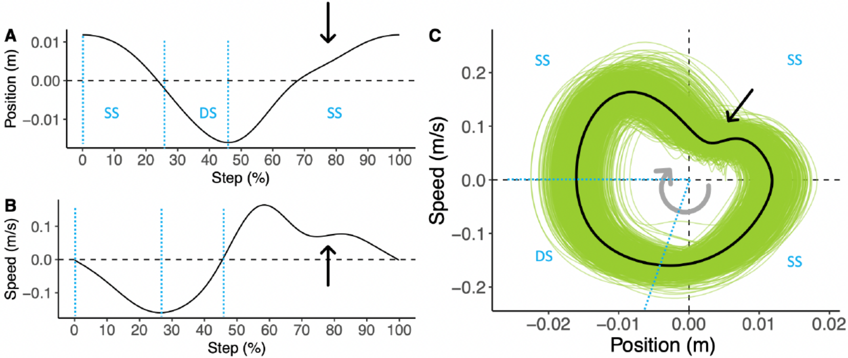
- La dynamique est formulée dans l'espace des phases $(\vec{q}, \vec{p})$ avec $\vec{q}$ les positions et $\vec{p}$ les impulsions. Le Hamiltonien H mène aux équations du mouvement, de premier ordre :

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}}, \quad \dot{\vec{q}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}.$$

- Typiquement, $H = E_k + E_p$ et $\vec{p} \sim \dot{\vec{q}}$.
- Dans l'espace des phases, tous les degrés de liberté sont explicités et l'analyse des trajectoires est fondamentalement géométrique.
- Le principe de moindre action est toujours d'actualité.

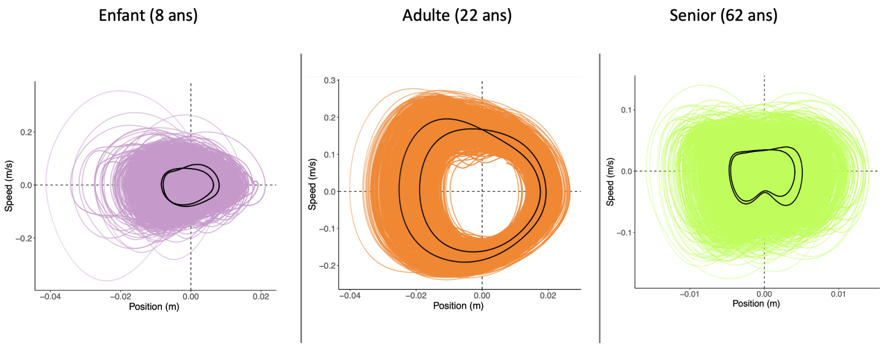
Chaos et attracteurs

- L'espace des phase est l'environnement le plus favorable à l'étude des systèmes chaotiques.
- Revenons au cas d'un jeune adulte marchant durant 10 minutes sur un tapis roulant [BBD+23]



Chaos et attracteurs

- La variabilité apparaît clairement comme une variabilité "autour" d'un attracteur (en noir), qui est une sorte de motif idéal.
- Note : suivre un attracteur, ça s'apprend !



Invariants adiabatiques

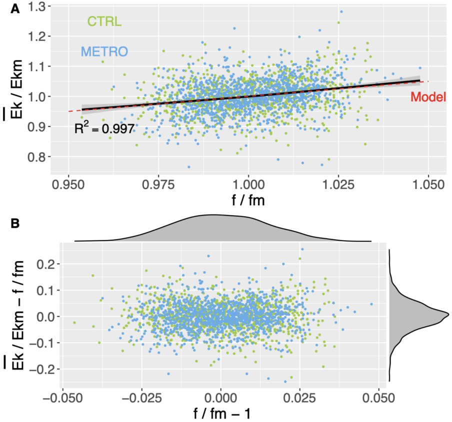
- Dynamique indépendante du temps :

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_\Gamma p \, dq$$

  est constante avec Γ une boucle fermée dans le plan (q, p).
- Dynamique dépendante du temps : I est presque constant [LL88] et est appelée invariant adiabatique.
- $\overline{E_k} = \pi \, I \, f$: L'énergie cinétique et la fréquence peuvent fluctuer durant des mouvements périodiques mais I reste constant.

Invariants adiabatiques

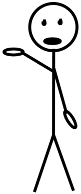
- Le cas – encore – d'un jeune adulte marchant 10 minutes sur un tapis roulant [BDB+22]



Une conclusion légère

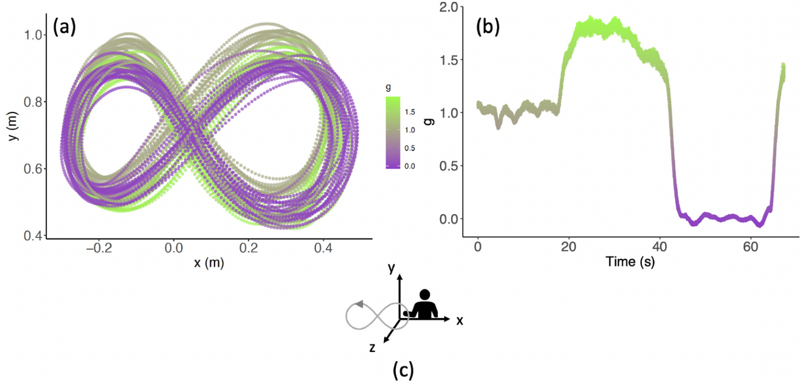
Jusqu'ici

- Nous avons vu que les différentes formulations de la Mécanique permettent d'éclairer le mouvement volontaire humain.
- Suivre les lois de la Mécanique est a priori plus économe en énergie ($I \sim \mathrm{VO}_2$?), voire en information.
- Dans un environnement variable dans le temps que vous n'avez *jamais* rencontré, comment vous adapteriez-vous ?



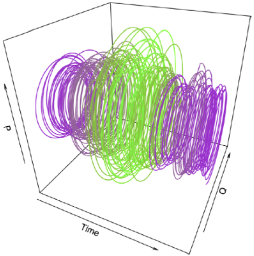
Entre 0 et 2 g

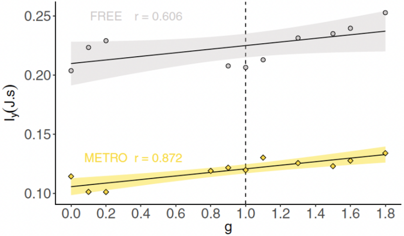
- [BBD$^+$21] : Demandons à de jeunes adultes sains de réaliser des mouvements en forme d'∞ avec le bras durant un vol parabolique.



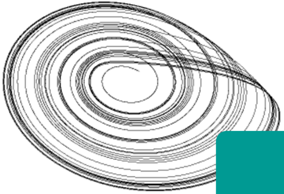
I vs g

- D'après la Mécanique de Hamilton, I est linéaire en g, et c'est ce que font les participants.





- Adaptation très rapide au changement de gravité.
- Mécanismes physiologiques encore à expliquer.



Mechanics rules
– To be continued

References I

Jooeun Ahn and Neville Hogan, *Long-range correlations in stride intervals may emerge from non-chaotic walking dynamics*, PLOS ONE **8** (2013), no. 9, 1–10.

N. Boulanger, F. Buisseret, V. Dehouck, F. Dierick, and O. White, *Motor strategies and adiabatic invariants : The case of rhythmic motion in parabolic flights*, Phys. Rev. E **104** (2021), 024403.

Nicolas Boulanger, Fabien Buisseret, Victor Dehouck, Frederic Dierick, and Olivier White, *Diffusion in phase space as a tool to assess variability of vertical centre-of-mass motion during long-range walking*, Physics **5** (2023), no. 1, 168–178.

Nicolas Boulanger, Fabien Buisseret, Frederic Dierick, and Olivier White, *Higher-derivative harmonic oscillators : stability of classical dynamics and adiabatic invariants*, Eur. Phys. J. C **79** (2019), no. 1, 60.

References II

- Fabien Buisseret, Victor Dehouck, Nicolas Boulanger, Guillaume Henry, Florence Piccinin, Olivier White, and Frederic Dierick, *Adiabatic invariant of center-of-mass motion during walking as a dynamical stability constraint on stride interval variability and predictability*, Biology **11** (2022), no. 9.

- R. Blickhan, *The spring-mass model for running and hopping*, Journal of Biomechanics **22** (1989), no. 11, 1217–1227.

- T Flash and N Hogan, *The coordination of arm movements : an experimentally confirmed mathematical model*, Journal of Neuroscience **5** (1985), no. 7, 1688–1703.

- Tamar Flash and Amir A. Handzel, *Affine differential geometry analysis of human arm movements*, Biological Cybernetics **96** (2007), no. 6, 577–601.

- JM Hausdorff, CK Peng, Z Ladin, JY Wei, and AL Goldberger, *Is walking a random walk ? Evidence for long-range correlations in stride interval of human gait.*, Journal of Applied Physiology **78** (1995), no. 1, 349–358.

References III

- H. E. Hurst, *Long-term storage capacity of reservoirs*, Transactions of the American Society of Civil Engineers **116** (1951), no. 1, 770–799.
- N. C. Heglund, P. A. Willems, M. Penta, and G. A. Cavagna, *Energy-saving gait mechanics with head-supported loads*, Nature **375** (1995), no. 6526, 52–54.
- L. Landau and E. Lifchitz, *Physique theorique tome 1 : Mecanique*, E. MIR, Moscow, 1988.
- Francesco Lacquaniti, Carlo Terzuolo, and Paolo Viviani, *The law relating the kinematic and figural aspects of drawing movements*, Acta Psychologica **54** (1983), no. 1, 115–130.
- Justus D. Ortega and Claire T. Farley, *Minimizing center of mass vertical movement increases metabolic cost in walking*, Journal of Applied Physiology **99** (2005), no. 6, 2099–2107, PMID : 16051716.
- A. Pais and G. E. Uhlenbeck, *On Field theories with nonlocalized action*, Phys. Rev. **79** (1950), 145–165.

References IV

Juergen Rummel, Yvonne Blum, H. Moritz Maus, Christian Rode, and Andre Seyfarth, *Stable and robust walking with compliant legs*, 2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2010, pp. 5250–5255.

Emanuel Todorov and Michael I. Jordan, *Optimal feedback control as a theory of motor coordination*, Nature Neuroscience **5** (2002), no. 11, 1226–1235.